Je lègue ...

Jean Duprat

Je lègue ...

Jean Duprat

ANR Galapagos

Démonstrations de géométrie plane euclidienne avec un assistant de preuves

- Assistant de preuves : Coq
  - vision constructive
  - séparation Set (figures) et Prop (propriétés)
  - éviter autant que faire se peut le numérique
- Inspiration
  - plus proche d'Euclide que de Hilbert ou de Descartes

Le plan

- Ensemble de points muni d'une orientation et d'une métrique
- Orientation
  - Clockwise
  - $Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Prop$
  - $\circlearrowright A\ B\ C$
  - 6 axiomes
- Métrique
  - EquiDistant
  - $Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Prop$
  - $AB \doteq CD$
  - 11 axiomes

Le plan

- Ensemble de points muni d'une orientation et d'une métrique
- Orientation
  - Clockwise
  - $Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Prop$
  - $\circlearrowright A \ B \ C$
  - 6 axiomes
- Métrique
  - EquiDistant
  - $Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Prop$
  - $AB \doteq CD$
  - 11 axiomes

Le plan

- Ensemble de points muni d'une orientation et d'une métrique
- Orientation
  - Clockwise
  - $Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Prop$
  - $\circlearrowright A\ B\ C$
  - 6 axiomes
- Métrique
  - EquiDistant
  - $Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Point \rightarrow Prop$
  - $AB \doteq CD$
  - 11 axiomes

Constructions de figures

- Règle
  - constructeur de droites
  - $A \neq B \rightarrow (AB)$
- Compas
  - constructeur de cercles
  - (A, BC), centre A, rayon BC
- Intersections
  - constructeur de points
  - $d1 \nparallel d2 \rightarrow d1 \cap d2$
  - $c1 \between c2 \rightarrow c1 \cap c2$
  - $d \oslash c \rightarrow c \cap d$

Constructions de figures

- Règle
  - constructeur de droites
  - $A \neq B \rightarrow (AB)$
- Compas
  - constructeur de cercles
  - (A, BC), centre A, rayon BC
- Intersections
  - constructeur de points
  - $d1 \nparallel d2 \rightarrow d1 \cap d2$
  - $c1 \between c2 \rightarrow c1 \cap c2$
  - $d \oslash c \rightarrow c \cap d$

Constructions de figures

- Règle
  - constructeur de droites
  - $A \neq B \longrightarrow (AB)$
- Compas
  - constructeur de cercles
  - (A, BC), centre A, rayon BC
- Intersections
  - constructeur de points
  - $d1 \nparallel d2 \longrightarrow d1 \cap d2$
  - $c1 \between c2 \longrightarrow c1 \cap c2$
  - $d \oslash c \longrightarrow c \cap d$

Points

- Définition
  - 2 points de base : $O, \ U$
  - par intersection : $PointDef$: $intersection \rightarrow Point$
- Incidence
  - $M \in (AB) \Leftrightarrow Collinear \ A \ B \ M$
  - $M \in (A, BC) \Leftrightarrow AM \doteq BC$
  - $M = PointDef(d1 \cap d2) \Rightarrow M \in d1 \wedge M \in d2$
  - $M = PointDef(c1 \cap c2) \Rightarrow M \in c1 \wedge M \in c2$
  - $M = PointDef(c \cap d) \Rightarrow M \in c \wedge M \in d$
- Egalité
  - $M \in d1 \wedge M \in d2 \wedge d1 \nparallel d2 \Rightarrow M = PointDef(d1 \cap d2)$
  - $M \in c1 = (A1, \_) \wedge M \in c2 = (A2, \_) \wedge$ $\neg \circlearrowright A1 \ M \ A2 \wedge c1 \between c2 \Rightarrow M = PointDef(c1 \cap c2)$
  - $M \in c = (A, \_) \wedge M \in d = (BC) \wedge AM \rightrightarrows BC \wedge d \oslash c \Rightarrow$ $M = PointDef(c \cap d)$

Points

- Définition
  - 2 points de base : $O, \; U$
  - par intersection : $PointDef : intersection \rightarrow Point$
- Incidence
  - $M \in (AB) \Leftrightarrow Collinear \; A \; B \; M$
  - $M \in (A, BC) \Leftrightarrow AM \doteq BC$
  - $M = PointDef(d1 \cap d2) \Rightarrow M \in d1 \wedge M \in d2$
  - $M = PointDef(c1 \cap c2) \Rightarrow M \in c1 \wedge M \in c2$
  - $M = PointDef(c \cap d) \Rightarrow M \in c \wedge M \in d$
- Egalité
  - $M \in d1 \wedge M \in d2 \wedge d1 \nparallel d2 \Rightarrow M = PointDef(d1 \cap d2)$
  - $M \in c1 = (A1, \_) \wedge M \in c2 = (A2, \_) \wedge$ $\neg \circlearrowright A1 \; M \; A2 \wedge c1 \between c2 \Rightarrow M = PointDef(c1 \cap c2)$
  - $M \in c = (A, \_) \wedge M \in d = (BC) \wedge AM \rightrightarrows BC \wedge d \oslash c \Rightarrow$ $M = PointDef(c \cap d)$

Points

- Définition
  - 2 points de base : $O, \ U$
  - par intersection : $PointDef \ : \ intersection \rightarrow Point$
- Incidence
  - $M \in (AB) \Leftrightarrow Collinear \ A \ B \ M$
  - $M \in (A, BC) \Leftrightarrow AM \doteq BC$
  - $M = PointDef(d1 \cap d2) \Rightarrow M \in d1 \wedge M \in d2$
  - $M = PointDef(c1 \cap c2) \Rightarrow M \in c1 \wedge M \in c2$
  - $M = PointDef(c \cap d) \Rightarrow M \in c \wedge M \in d$
- Egalité
  - $M \in d1 \wedge M \in d2 \wedge d1 \nparallel d2 \Rightarrow M = PointDef(d1 \cap d2)$
  - $M \in c1 = (A1, \_) \wedge M \in c2 = (A2, \_) \wedge$ $\neg \circlearrowright A1 \ M \ A2 \wedge c1 \between c2 \Rightarrow M = PointDef(c1 \cap c2)$
  - $M \in c = (A, \_) \wedge M \in d = (BC) \wedge AM \rightrightarrows BC \wedge d \oslash c \Rightarrow$ $M = PointDef(c \cap d)$

Distance

- Définition
  - $AB = PointDef((O, AB) \cap (OU))$
  - unique point de la demi-droite $[O, U)$
  - pas d'utilisation de nombres réels
- Egalité
  - égalité par égalité de points
  - coïncidence avec la relation d'équidistance
- Addition
  - addition par aboutement (relation de Chasles)

Distance

- Définition
  - $AB = PointDef((O, AB) \cap (OU))$
  - unique point de la demi-droite $[O, U)$
  - pas d'utilisation de nombres réels
- Egalité
  - égalité par égalité de points
  - coïncidence avec la relation d'équidistance
- Addition
  - addition par aboutement (relation de Chasles)

Distance

- Définition
  - $AB = \mathit{PointDef}((O, AB) \cap (OU))$
  - unique point de la demi-droite $[O, U)$
  - pas d'utilisation de nombres réels
- Egalité
  - égalité par égalité de points
  - coïncidence avec la relation d'équidistance
- Addition
  - addition par aboutement (relation de Chasles)

Angle

- Définition
  - Soient A, B et C trois points avec $A \neq B$ et $A \neq C$
  - soit B' le point de $[AB)$ tel que $AB' = OU$
  - soit C' le point de $[AC)$ tel que $AC' = OU$
  - on appelle $\widehat{BAC}$ le point M tel que $M \in (O, OU)$, $UM = B'C'$ et $\circlearrowright\ O\ M\ U$
- Remarques
  - angles non orientés
  - égalité d'angle découle de l'égalité de points
- Congruence
  - angles congruents *Congruent* $A\ B\ C\ D\ E\ F$
  - il existe des preuves que $B \neq A$, $B \neq C$, $E \neq D$, $E \neq F$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

Angle

- Définition
  - Soient A, B et C trois points avec $A \neq B$ et $A \neq C$
  - soit B' le point de $[AB)$ tel que $AB' = OU$
  - soit C' le point de $[AC)$ tel que $AC' = OU$
  - on appelle $\widehat{BAC}$ le point M tel que $M \in (O, OU)$, $UM = B'C'$ et $\circlearrowright\ O\ M\ U$
- Remarques
  - angles non orientés
  - égalité d'angle découle de l'égalité de points
- Congruence
  - angles congruents *Congruent* $A\ B\ C\ D\ E\ F$
  - il existe des preuves que $B \neq A$, $B \neq C$, $E \neq D$, $E \neq F$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

Angle

- Définition
  - Soient A, B et C trois points avec $A \neq B$ et $A \neq C$
  - soit B' le point de $[AB)$ tel que $AB' = OU$
  - soit C' le point de $[AC)$ tel que $AC' = OU$
  - on appelle $\widehat{BAC}$ le point M tel que $M \in (O, OU)$, $UM = B'C'$ et $\circlearrowright\ O\ M\ U$
- Remarques
  - angles non orientés
  - égalité d'angle découle de l'égalité de points
- Congruence
  - angles congruents *Congruent* $A\ B\ C\ D\ E\ F$
  - il existe des preuves que $B \neq A$, $B \neq C$, $E \neq D$, $E \neq F$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

Tactiques de raisonnements

- canonize
  - déplie les définitions
- immediate
  - efface le but ou échoue
- step H
  - utilise l'hypothèse H pour transformer le but ou échoue
  - variante step n pour l'égalité des triangles
- usingChasles A B C, usingChaslesRec
  - applique Chasles ou sa réciproque
- byCases ...
  - étude par cas
- contrapose H, absurd H, contradict H1 H2
  - manipulations logiques

Tactiques de raisonnements

- canonize
  - déplie les définitions
- immediate
  - efface le but ou échoue
- step H
  - utilise l'hypothèse H pour transformer le but ou échoue
  - variante step n pour l'égalité des triangles
- usingChasles A B C, usingChaslesRec
  - applique Chasles ou sa réciproque
- byCases ...
  - étude par cas
- contrapose H, absurd H, contradict H1 H2
  - manipulations logiques

Tactiques de raisonnements

- canonize
  - déplie les définitions
- immediate
  - efface le but ou échoue
- step H
  - utilise l'hypothèse H pour transformer le but ou échoue
  - variante step n pour l'égalité des triangles
- usingChasles A B C, usingChaslesRec
  - applique Chasles ou sa réciproque
- byCases ...
  - étude par cas
- contrapose H, absurd H, contradict H1 H2
  - manipulations logiques

Tactiques de raisonnements

- canonize
  - déplie les définitions
- immediate
  - efface le but ou échoue
- step H
  - utilise l'hypothèse H pour transformer le but ou échoue
  - variante step n pour l'égalité des triangles
- usingChasles A B C, usingChaslesRec
  - applique Chasles ou sa réciproque
- byCases ...
  - étude par cas
- contrapose H, absurd H, contradict H1 H2
  - manipulations logiques

Tactiques de raisonnements

- canonize
  - déplie les définitions
- immediate
  - efface le but ou échoue
- step H
  - utilise l'hypothèse H pour transformer le but ou échoue
  - variante step n pour l'égalité des triangles
- usingChasles A B C, usingChaslesRec
  - applique Chasles ou sa réciproque
- byCases ...
  - étude par cas
- contrapose H, absurd H, contradict H1 H2
  - manipulations logiques

Tactiques de raisonnements

- canonize
  - déplie les définitions
- immediate
  - efface le but ou échoue
- step H
  - utilise l'hypothèse H pour transformer le but ou échoue
  - variante step n pour l'égalité des triangles
- usingChasles A B C, usingChaslesRec
  - applique Chasles ou sa réciproque
- byCases ...
  - étude par cas
- contrapose H, absurd H, contradict H1 H2
  - manipulations logiques

Tatiques de constructions de base

- setLine A B d
  - vérifie que $A \neq B$ puis pose $d = (AB)$
- setCircle A B C g
  - pose $g = (A, BC)$
- setInterLine d1 d2 M
  - vérifie $d1 \nparallel d2$ puis pose $M := d1 \cap d2$
  - ajoute les hypothèses $M \in d1$, $M \in d2$
- setInterCircle c1 c2 M
  - vérifie $c1 \between c2$ puis pose $M := c1 \cap c2$
  - ajoute les hypothèses $M \in c1$, $M \in c2$, $\neg \circlearrowright A_{c1}\ M\ A_{c2}$
- setInterDiameter c d M
  - vérifie $d \oslash c$ puis pose $M := c \cap d$
  - ajoute les hypothèses $M \in c$, $M \in d$, $A_c M \rightrightarrows A_d B_d$

Tatiques de constructions de base

- setLine A B d
  - vérifie que $A \neq B$ puis pose $d = (AB)$
- setCircle A B C g
  - pose $g = (A, BC)$
- setInterLine d1 d2 M
  - vérifie $d1 \nparallel d2$ puis pose $M := d1 \cap d2$
  - ajoute les hypothèses $M \in d1$, $M \in d2$
- setInterCircle c1 c2 M
  - vérifie $c1 \between c2$ puis pose $M := c1 \cap c2$
  - ajoute les hypothèses $M \in c1$, $M \in c2$, $\neg \circlearrowright A_{c1} \ M \ A_{c2}$
- setInterDiameter c d M
  - vérifie $d \oslash c$ puis pose $M := c \cap d$
  - ajoute les hypothèses $M \in c$, $M \in d$, $A_c M \rightrightarrows A_d B_d$

Tatiques de constructions de base

- setLine A B d
  - vérifie que $A \neq B$ puis pose $d = (AB)$
- setCircle A B C g
  - pose $g = (A, BC)$
- setInterLine d1 d2 M
  - vérifie $d1 \nparallel d2$ puis pose $M := d1 \cap d2$
  - ajoute les hypothèses $M \in d1$, $M \in d2$
- setInterCircle c1 c2 M
  - vérifie $c1 \between c2$ puis pose $M := c1 \cap c2$
  - ajoute les hypothèses $M \in c1$, $M \in c2$, $\neg \circlearrowright A_{c1}\ M\ A_{c2}$
- setInterDiameter c d M
  - vérifie $d \oslash c$ puis pose $M := c \cap d$
  - ajoute les hypothèses $M \in c$, $M \in d$, $A_c M \rightrightarrows A_d B_d$

Tatiques de constructions de base

- setLine A B d
  - vérifie que $A \neq B$ puis pose $d = (AB)$
- setCircle A B C g
  - pose $g = (A, BC)$
- setInterLine d1 d2 M
  - vérifie $d1 \nparallel d2$ puis pose $M := d1 \cap d2$
  - ajoute les hypothèses $M \in d1$, $M \in d2$
- setInterCircle c1 c2 M
  - vérifie $c1 \between c2$ puis pose $M := c1 \cap c2$
  - ajoute les hypothèses $M \in c1$, $M \in c2$, $\neg \circlearrowright A_{c1}\ M\ A_{c2}$
- setInterDiameter c d M
  - vérifie $d \oslash c$ puis pose $M := c \cap d$
  - ajoute les hypothèses $M \in c$, $M \in d$, $A_c M \rightrightarrows A_d B_d$

Tatiques de constructions de base

- setLine A B d
  - vérifie que $A \neq B$ puis pose $d = (AB)$
- setCircle A B C g
  - pose $g = (A, BC)$
- setInterLine d1 d2 M
  - vérifie $d1 \nparallel d2$ puis pose $M := d1 \cap d2$
  - ajoute les hypothèses $M \in d1$, $M \in d2$
- setInterCircle c1 c2 M
  - vérifie $c1 \between c2$ puis pose $M := c1 \cap c2$
  - ajoute les hypothèses $M \in c1$, $M \in c2$, $\neg \circlearrowright A_{c1}\ M\ A_{c2}$
- setInterDiameter c d M
  - vérifie $d \oslash c$ puis pose $M := c \cap d$
  - ajoute les hypothèses $M \in c$, $M \in d$, $A_c M \rightrightarrows A_d B_d$

Exemples de tactiques de constructions de points

- setMarkSegment A B C D M
  - vérifie $A \neq B$ et pose $M = MarkSegment\ A\ B\ C\ D\ Hab$
  - avec $M \in [A, B)$ et $AM = CD$
- setMidPoint A B M
  - vérifie $A \neq B$ et pose $M := MidPoint\ A\ B\ Hab$
  - avec $A - M - B$ et $AM = MB$
- setEquilateral A B C
  - vérifie $A \neq B$ et pose C
  - avec $AC = AB$, $BC = AB$ et $\circlearrowright\ A\ C\ B$
- setStrictParallelogramm A B C D
  - vérifie $\circlearrowright\ A\ B\ C$ et pose D
  - avec $CD = AB$, $AD = BC$ et $\circlearrowright\ C\ D\ A$

Exemples de tactiques de constructions de points

- setMarkSegment A B C D M
  - vérifie $A \neq B$ et pose $M = MarkSegment\ A\ B\ C\ D\ Hab$
  - avec $M \in [A, B)$ et $AM = CD$
- setMidPoint A B M
  - vérifie $A \neq B$ et pose $M := MidPoint\ A\ B\ Hab$
  - avec $A - M - B$ et $AM = MB$
- setEquilateral A B C
  - vérifie $A \neq B$ et pose C
  - avec $AC = AB$, $BC = AB$ et $\circlearrowright\ A\ C\ B$
- setStrictParallelogramm A B C D
  - vérifie $\circlearrowright\ A\ B\ C$ et pose D
  - avec $CD = AB$, $AD = BC$ et $\circlearrowright\ C\ D\ A$

Exemples de tactiques de constructions de points

- setMarkSegment A B C D M
  - vérifie $A \neq B$ et pose $M = MarkSegment\ A\ B\ C\ D\ Hab$
  - avec $M \in [A, B)$ et $AM = CD$
- setMidPoint A B M
  - vérifie $A \neq B$ et pose $M := MidPoint\ A\ B\ Hab$
  - avec $A - M - B$ et $AM = MB$
- setEquilateral A B C
  - vérifie $A \neq B$ et pose C
  - avec $AC = AB$, $BC = AB$ et $\circlearrowright\ A\ C\ B$
- setStrictParallelogramm A B C D
  - vérifie $\circlearrowright\ A\ B\ C$ et pose D
  - avec $CD = AB$, $AD = BC$ et $\circlearrowright\ C\ D\ A$

Exemples de tactiques de constructions de points

- setMarkSegment A B C D M
  - vérifie $A \neq B$ et pose $M = MarkSegment\ A\ B\ C\ D\ Hab$
  - avec $M \in [A, B)$ et $AM = CD$
- setMidPoint A B M
  - vérifie $A \neq B$ et pose $M := MidPoint\ A\ B\ Hab$
  - avec $A - M - B$ et $AM = MB$
- setEquilateral A B C
  - vérifie $A \neq B$ et pose C
  - avec $AC = AB$, $BC = AB$ et $\circlearrowright\ A\ C\ B$
- setStrictParallelogramm A B C D
  - vérifie $\circlearrowright\ A\ B\ C$ et pose D
  - avec $CD = AB$, $AD = BC$ et $\circlearrowright\ C\ D\ A$

Exemples de tactiques de constructions de droites

- setMidLine A B d
  - vérifie $A \neq B$ et pose $d := MidLineABHab$
  - avec $\forall M, M \in d \Rightarrow MA = MB$ et $\forall M, MA = MB \Rightarrow M \in d$
- setParallel d1 A d2
  - vérifie $A \notin d1$ et pose $d2 := Parallel\ d1\ A$
  - avec $A \notin d$ et $d1 \parallel d2$
- setPerpendicularUp d1 A d2
  - vérifie $A \in d1$ et pose $d2 := PerpendicularUp\ d1\ A$
  - avec $A \in d2,\ d1 \perp d2$
- setPerpendicularDown d1 A d2
  - vérifie $A \notin d1$ et pose $d2 := PerpendicularDown\ d1\ A$
  - avec $A \in d2,\ d1 \perp d2$

Exemples de tactiques de constructions de droites

- setMidLine A B d
  - vérifie $A \neq B$ et pose $d := MidLineABHab$
  - avec $\forall M, M \in d \Rightarrow MA = MB$ et $\forall M, MA = MB \Rightarrow M \in d$
- setParallel d1 A d2
  - vérifie $A \notin d1$ et pose $d2 := Parallel\ d1\ A$
  - avec $A \notin d$ et $d1 \parallel d2$
- setPerpendicularUp d1 A d2
  - vérifie $A \in d1$ et pose $d2 := PerpendicularUp\ d1\ A$
  - avec $A \in d2,\ d1 \perp d2$
- setPerpendicularDown d1 A d2
  - vérifie $A \notin d1$ et pose $d2 := PerpendicularDown\ d1\ A$
  - avec $A \in d2,\ d1 \perp d2$

Exemples de tactiques de constructions de droites

- setMidLine A B d
  - vérifie $A \neq B$ et pose $d := MidLineABHab$
  - avec $\forall M, M \in d \Rightarrow MA = MB$ et $\forall M, MA = MB \Rightarrow M \in d$
- setParallel d1 A d2
  - vérifie $A \notin d1$ et pose $d2 := Parallel\ d1\ A$
  - avec $A \notin d$ et $d1 \parallel d2$
- setPerpendicularUp d1 A d2
  - vérifie $A \in d1$ et pose $d2 := PerpendicularUp\ d1\ A$
  - avec $A \in d2$, $d1 \perp d2$
- setPerpendicularDown d1 A d2
  - vérifie $A \notin d1$ et pose $d2 := PerpendicularDown\ d1\ A$
  - avec $A \in d2$, $d1 \perp d2$

Exemples de tactiques de constructions de droites

- setMidLine A B d
  - vérifie $A \neq B$ et pose $d := MidLineABHab$
  - avec $\forall M, M \in d \Rightarrow MA = MB$ et $\forall M, MA = MB \Rightarrow M \in d$
- setParallel d1 A d2
  - vérifie $A \notin d1$ et pose $d2 := Parallel\ d1\ A$
  - avec $A \notin d$ et $d1 \parallel d2$
- setPerpendicularUp d1 A d2
  - vérifie $A \in d1$ et pose $d2 := PerpendicularUp\ d1\ A$
  - avec $A \in d2$, $d1 \perp d2$
- setPerpendicularDown d1 A d2
  - vérifie $A \notin d1$ et pose $d2 := PerpendicularDown\ d1\ A$
  - avec $A \in d2$, $d1 \perp d2$

Document

- texte (en mauvais anglais) r'edigé pour ADG
- deuxième contribution Coq (en préparation)
- mode d'emploi (à rédiger)

Utilisation

- enseignement de la géométrie dans le secondaire
  - proximité avec la géométrie euclidienne la règle et au compas
  - possibilité de faire du raisonnement en avant
  - jeu réduit de tactiques pouvant être rédigé en des phrases
  - interfaçage avec un logiciel de dessin dynamique de figures
  - possibilité de rajout de définitions et de constructions (ex : bissectrices)

Etudes éventuelles

- Etablir une logique
  - une induction mutuelle contenant des définitions dans Set et d'autres dans Prop
  - une induction affaiblie, sans unicité de la construction
  - une égalité par propriété caractéristique
- trouver des définitions inductives
  - pour Clockwise
  - pour EquiDistant
- peut-être est-ce une recherche du Graal irréalisable...