Description formelle de propriétés géométriques

PHAM Tuan Minh

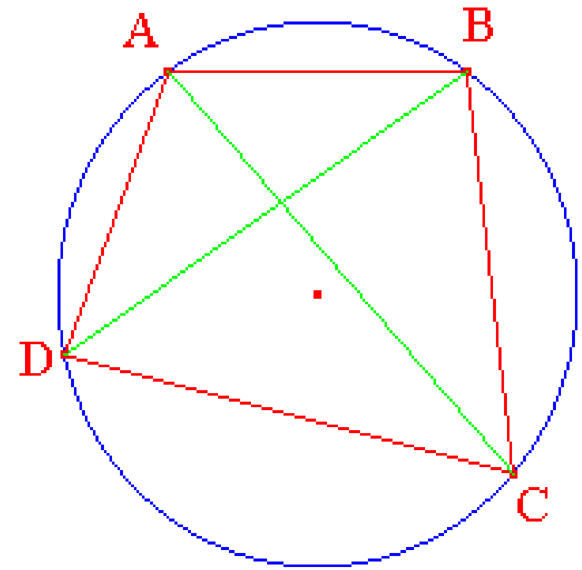
Plan

- Problématique
- Formalisation et Démonstration
- Difficultés

Problématique

- Théorème de Ptolémée :
  Dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés

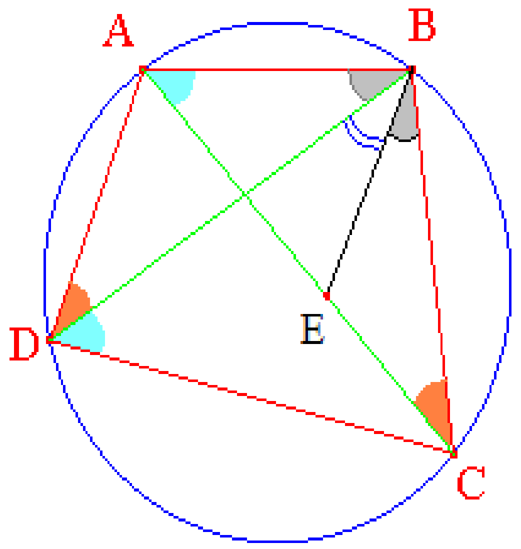
  AC * BD =AB * CD + AD * BC



Théorème de Ptolémée

Preuve géométrique :

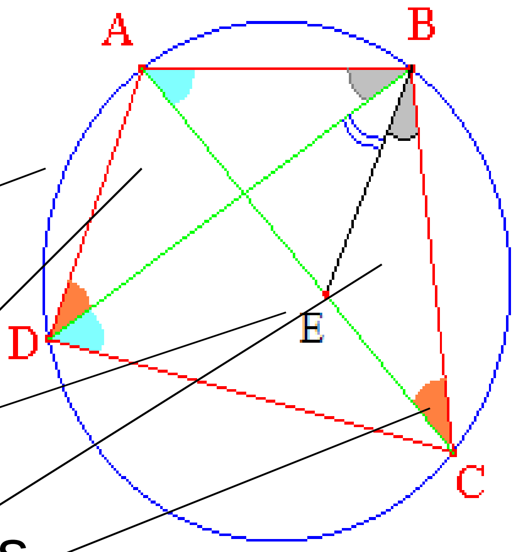
- Soit E le point de [AC] tel que ^ABD = ^EBC
- En tant qu'angles inscrits interceptant le même arc, On a ^ADB = ^ACB
- En tant que triangles ayant 2 angles égaux, on a que ΔABD et ΔEBC sont semblables
- Alors AB/BE = AD/EC = BD/BC, et EC * BD = BC * AD (1)
- De même façon pour ΔDBC et ΔABE, on a AE * BD = AB * CD (2)
- (1)+(2) -> AC * BD =AB * CD + AD * BC



Formalisation et Démonstration

- Trouver les notions et les lemmes
- Triangles semblables et la proportion de leurs côtés

Trouver des notions et des lemmes

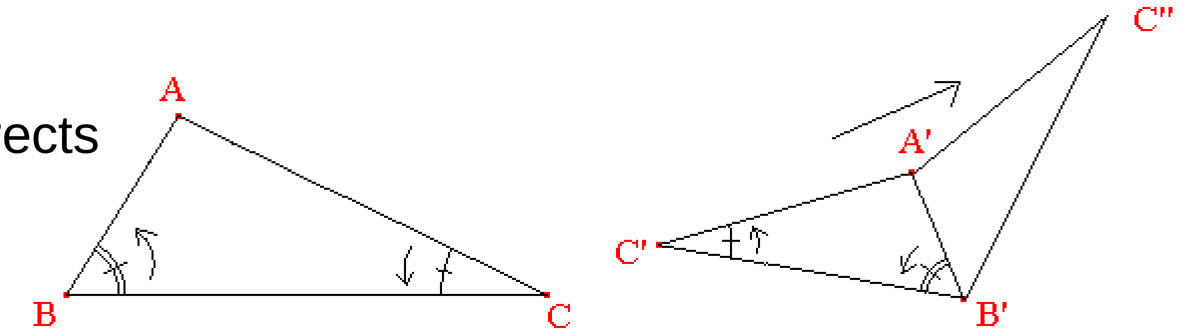


- Trouver des notions et des lemmes basés sur la bibliothèque de Frédérique
  - Notions des Cercles et Quadrilatères convexes inscrits dans un cercle
  - Étant donné un angle α < ^ABC , Il existe E dans [AC] tel que ^EBC = α
  - 2 angles inscrits interceptant le même arc sont égaux (^ADB = ^ACB)
  - Notion de triangles semblables
  - Proportion des côtés des triangles semblables
  - Etc ..

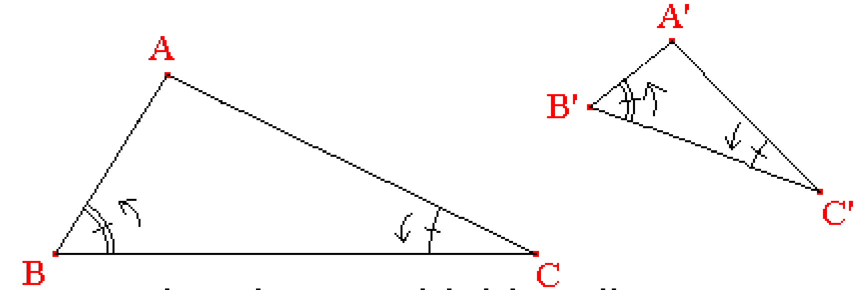
Triangles semblables et la proportion de leurs côtés

- Preuve géométrique
- 2 cas de triangles semblables (directs et indirects)
- Pour le cas indirect : "retourner" A'B'C' autour de (A'B'), symétrie axiale, on peut
  se ramener au cas direct;
- tourner A'B'C' autour de A' (rotation de centre A'), on peut supposer (B'C') // (BC);
- glisser A'B'C' (translation de vecteur ***A'A***), on peut supposer
  que A' = A.
- Appliquer le théorème de Thalès

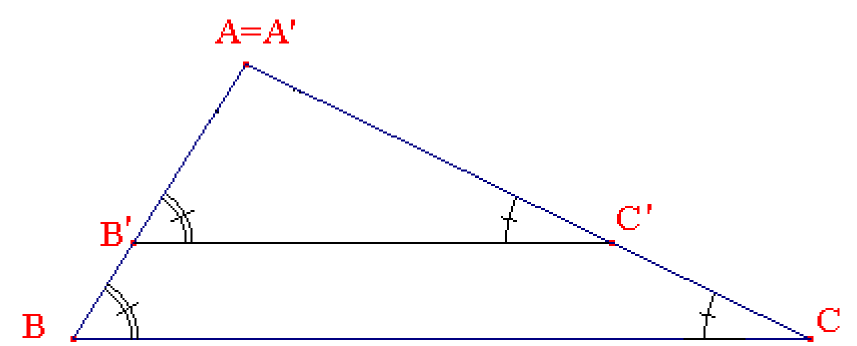
A’B’/AB = A’C’/AC = B’C’/BC



Triangles semblables indirects



Triangles semblables directs

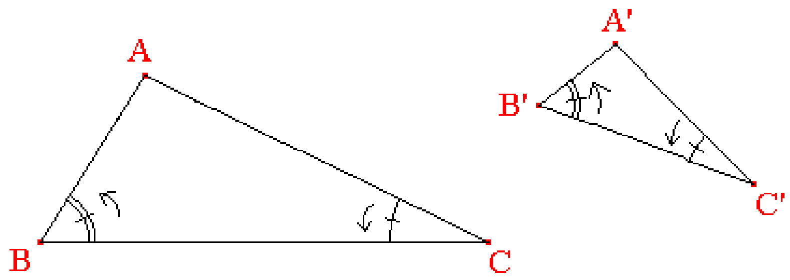


Appliquer la rotation et la translation

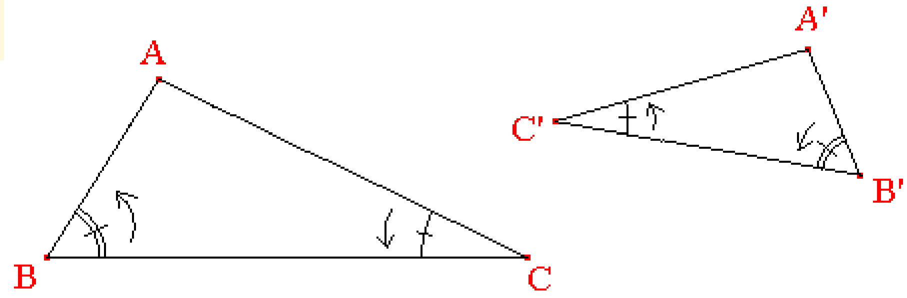
Triangles semblables et la proportion de leurs côtés

```
Definition triangles_semblables_direct (A B C A' B' C' : PO):Prop:=
triangle A B C /\ triangle A' B' C' /\
(
cons_AV (vec B C) (vec B A) = cons_AV (vec B' C') (vec B' A')
/\cons_AV (vec C A) (vec C B) = cons_AV (vec C' A') (vec C' B' )
).

Definition triangles_semblables_indirect (A B C A' B' C' : PO):Prop:=
triangle A B C /\ triangle A' B' C' /\
(
cons_AV (vec B C) (vec B A) = cons_AV (vec B' A') (vec B' C')
/\cons_AV (vec C A) (vec C B) = cons_AV (vec C' B' ) (vec C' A')
).
```



Triangles semblables directs



Triangles semblables indirects

- L'ordre permuté

Δ ABC ~ Δ A'B'C' -> ΔACB ~ ΔA'C'B'

- La relation transitive

Δ ABC ~ Δ MNP /\ ΔMNP ~ ΔA'B'C'

-> ΔABC ~ ΔA'B'C'

-etc..

Triangles semblables et la proportion de leurs côtés

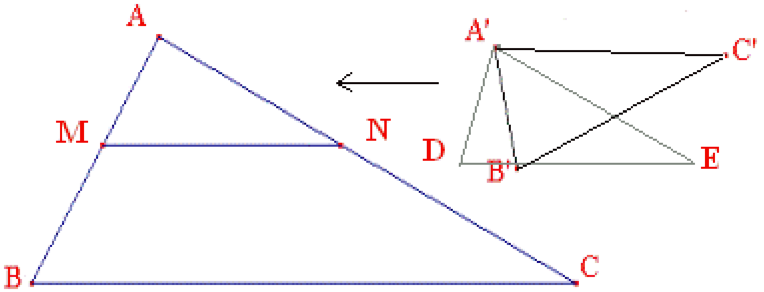
- Un triangle et son image après avoir appliqué une transformation de rotation, de translation ou de reflexion

```
Lemma rotation_triangles_semblables_direct:
forall (I A B C A' B' C' :PO) ( a : R),
triangle A B C ->
A' = rotation I a A ->
B' = rotation I a B ->
C' = rotation I a C ->
triangles_semblables_direct A B C A' B' C'.
```

```
Lemma translation_triangle_semblables_direct:
forall I J A A' B B' C C' : PO,
triangle A B C ->
A' = translation I J A->
B' = translation I J B->
C' = translation I J C ->
triangles_semblables_direct A B C A' B' C'.
```

- Une conséquence de Thalès

```
Lemma Thales_consequence :
forall A B C M N :PO,
triangle A B C -> triangle A M N -> alignes A M B -> alignes A N C ->
paralleles (droite M N) (droite B C)->
   exists k:R,
                distance B C = k* distance M N  /\
                distance A B = k* distance A M /\
                distance A C = k * distance A N .
```



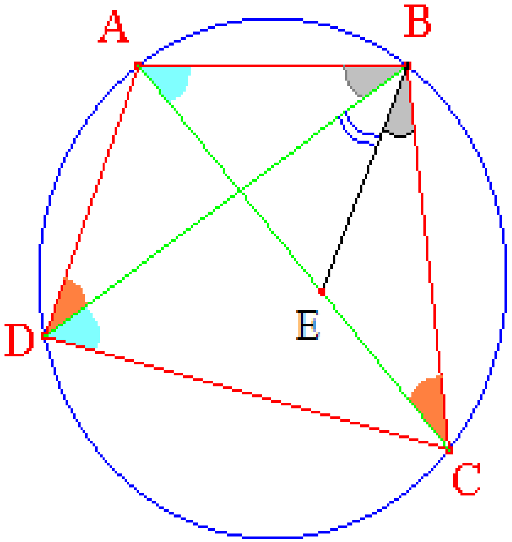
- La proportion des côtés des triangles semblables

```
Lemma triangles_semblables_direct_proportion :
forall A B C A' B' C' :PO,
triangles_semblables_direct A B C A' B' C' ->
   exists k:R,
                distance B C =k*distance B' C' /\
                distance A B = k*distance A' B' /\
                distance A C = k * distance A' C'.
```

Difficultés

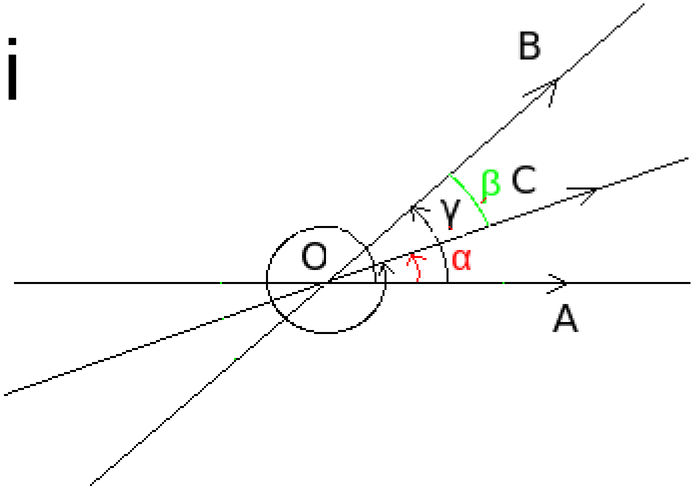
- Pour la preuve formelle de Ptolémée :
  - Formaliser le quadrilatère convexe inscrit avec l'ordre des sommets
  - Un vecteur (vec BE) qui se situe entre 2 vecteurs (vec BA et vec BC)
  - etc...

-> notion de l'orientation



Mes intuitions pour résoudre les difficultés

- Un angle des vecteurs est défini à 2π près

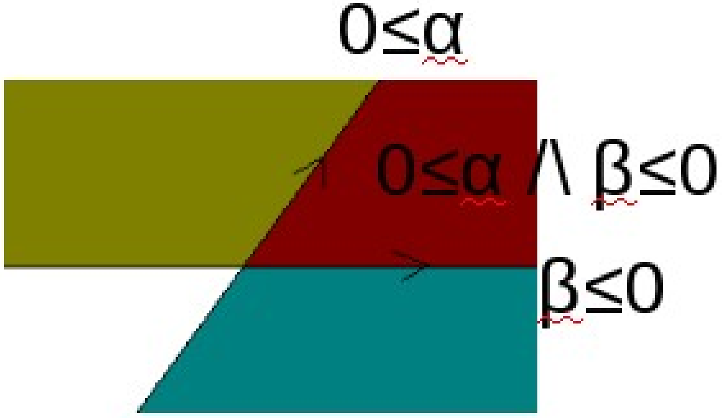


- Donne une base [$-\pi$ π],
  - mesure principale

$$-\pi<\alpha \leq \pi, -\pi<\beta \leq \pi$$

  - vec OC se situe entre vec OA et vec OB ssi :

$(0\leq\alpha \wedge \beta\leq 0) \vee (\alpha\leq 0 \wedge 0\leq\beta)$



Résumé

- Ce que j'ai fait
  - comprendre et récupérer la bibliothèque de Frédérique
  - Formaliser la notion de triangles semblables et prouver la proportion de leurs côtés (environ 700 lignes de code)
- Ce que je vais faire
  - Ajouter la notion de l'orientation
  - Construire une bibliothèque plus complète

Questions...