Formalisation d'algorithmes de géométrie
Enveloppes convexes et dégénérescence

Yves Bertot

November 2007

Plan

Pourquoi une étude formelle de la géométrie algorithmique

- Sortir les méthodes formelles de l'ornière,
- Méthodes formelles adaptées pour des programmes ayant des propriétés mathématiques,
- La géométrie intervient dans la correction de certains logiciels:
  - Détection de collision en aéronautique,
  - Robotique médicale,
  - Dosage d'irradiation en médecine nucléaire.
- Les structures de données de la géométrie (en 3 D) fournissent de nouveaux problèmes.

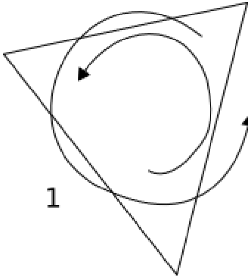
Autres études en géométrie

- Jacques Fleuriot: mécanique Newtonienne et analyse non-standard,
- Gonthier et Werner: le théorème des 4 couleurs,
- Frédérique Guilhot: formalisation de la géométrie élémentaire,
- Pottier et Guilhot, Narboux: interfaces graphiques aux preuves,
- Thomas Hales: vérification formelle de la conjecture de Kepler,
- Dufourd, Puitg, Dehlinger: cartes combinatoires.

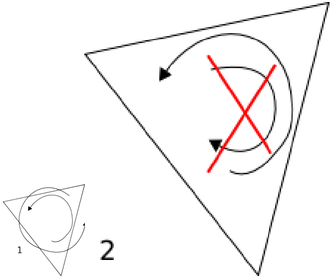
Enveloppes convexes

- Propriété d'orientation en 2D: prédicat à 3 arguments, noté $\overline{abc}$,
- 5 propriétés centrales proposées par Knuth (nommées axiomes),
  1. $\overline{abc} \Rightarrow \overline{bca}$
  2. $\overline{abc} \Rightarrow \neg\overline{acb}$
  3. $\overline{abc} \vee \overline{acb}$
  4. $\overline{abd} \wedge \overline{bcd} \wedge \overline{cad} \Rightarrow \overline{abc}$
  5. $\overline{abc} \wedge \overline{abd} \wedge \overline{abe} \wedge \overline{dbe} \wedge \overline{cbd} \Rightarrow \overline{cbe}$
- Une enveloppe convexe de $A = \{a_i\}$ est un cycle $x_1 \dots x_n$ tel que $\overline{x_i x_{i+1} a_k}$ pour tout choix d'indice,
- Définition non géométrique, mais instanciable avec la notion de triangle orienté,
- Axiome 3: données en propriété générale,
- Axiome 5: deux points sur le bord permettent de trier les autres.

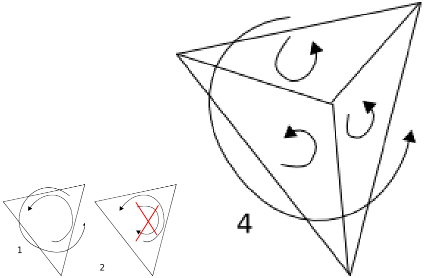
Modèle graphique des axiomes



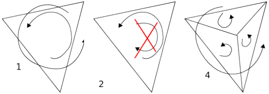
Modèle graphique des axiomes



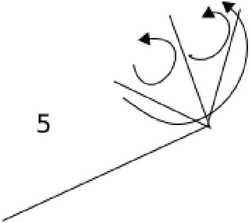
Modèle graphique des axiomes



Modèle graphique des axiomes



5



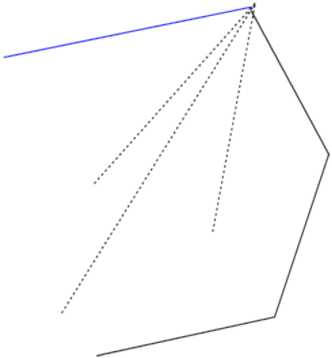
Modèle algébrique des axiomes

- $\overline{abc} \Leftrightarrow 0 < \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$
- Géométriquement le déterminant est l'aire orientée du triangle abc,
- Les axiomes 1 et 2 sont des conséquences des propriété de forme multi-linéaire alternée,
- L'axiome 4 est la propriété de somme des aires,
- L'axiome 5 est aussi fourni par un calcul algébrique simple (cf. Bertot&Pichardie01).

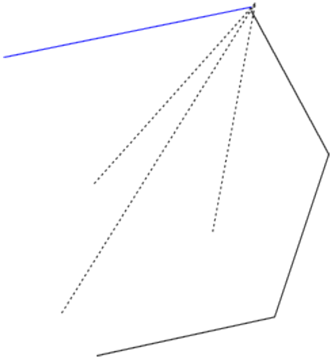
Deux algorithmes d'enveloppe convexe

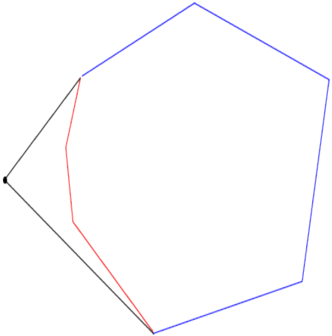
- Algorithme de Jarvis: paquets cadeaux,
  - Démarrer avec une arête du bord,
  - Pas besoin de l'axiome 4.
  - Construire une "pré-enveloppe" contigüe,
  - Arrêter lorsque l'on revient au premier point.
- Algorithme incrémental.
  - Maintenir à chaque instant une enveloppe convexe d'un sous-ensemble,
  - Pour un nouveau point déterminer la partie de l'enveloppe à enlever (fragment continu),
  - ajouter 0 ou 2 arètes.

Explication géométrique



Explication géométrique





Caractéristiques pour la formalisation

- Pour l'algorithme incrémental:
  - Il est structurel pour une donnée sous forme de liste,
  - Il faut démontrer que les arêtes rouges sont contigües,
  - Il faut montrer qu'on a bien une enveloppe à chaque étape.
- Pour l'algorithme du paquet cadeau:
  - Il faut un critère d'arrêt (le nombre de points hors de l'enveloppe décroit),
  - Il faut montrer que la comparaison avec le premier point suffit,
  - Il faut montrer que l'on a bien une "pré-enveloppe" à chaque étape.

Dégénérescence

- Prendre en compte les points alignés?
- Utiliser un deuxième prédicat pour indiquer qu'un point est entre deux autres,
  - Généraliser les axiomes pour les interaction avec le prédicat d'orientation,
  - Dix-neuf cas.
- Utiliser un prédicat qui trouve une orientation pour les triangles dégénérés,
  - Vérifier encore les 4 axiomes, satisfaire en plus le 5e,
  - Obtenir une version plus faible d'enveloppe convexe,
  - Une solution: perturbations.

Méthode des perturbations (Alliez, Deviller, Snoeyink)

- Trouver deux fonctions f et g telles que
- $f(x,y,0) = x$, $g(x,y,0) = y$,
- Les dégénérescences disparaissent pour t positif très petit
- Calculer $\lim_{t \to 0^+} sign \begin{vmatrix} f(x_p,y_p,t) & g(x_p,y_p,t) & 1 \\ f(x_q,y_q,t) & g(x_q,y_q,t) & 1 \\ f(x_r,y_r,t) & g(x_r,y_r,t) & 1 \end{vmatrix}$ au lieu de $sign\left(\begin{vmatrix} x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \end{vmatrix}\right)$
- Les axiomes 1,2,4,5 sont préservés par continuité,
- Comme t est très petit, on parle toujours des mêmes positions.

Perturbations pour l'orientation

- prendre $f(x,y,t) = x + ty$, $g(x,y,t) = y + t(x^2 + y^2)$,
- Le déterminant perturbé est un polynôme du second degré en t
  $A + Bt + Ct^2$
- Le terme constant A est le déterminant non perturbé,
- Le tour est joué si nous démontrons que A B et C ne sont jamais tous nuls

$$B = \begin{vmatrix} x_p & x_p^2 + y_p^2 & 1 \\ x_q & x_q^2 + y_q^2 & 1 \\ x_r & x_r^2 + y_r^2 & 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} y_p & x_p^2 + y_p^2 & 1 \\ y_q & x_q^2 + y_q^2 & 1 \\ y_r & x_r^2 + y_r^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Déterminants non nuls

$$B = \begin{vmatrix} x_p & x_p^2 + y_p^2 & 1 \\ x_q & x_q^2 + y_q^2 & 1 \\ x_r & x_r^2 + y_r^2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Si A est nul, les points sont alignés.
- Si la droite est d'équation $m_1 y = m_2 x + m_3$ avec $m_1 \neq 0$, alors $x^2 + y^2 = \frac{m_1^2+m_2^2}{m_1^2}x^2 + 2\frac{m_2}{m_1}x + \frac{m_3^2}{m_2^2}$ et $B = \frac{m_1^2+m_2^2}{m_2^2}(x_p - x_q)(x_q - x_r)(x_r - x_p)$
- Si la droite est verticale, même raisonnement avec C.

Perturbations

- Fin de la preuve:
  $A, B, C \neq 0 \Rightarrow \exists\varepsilon, 0 < t < \varepsilon \Rightarrow A + Bt + Ct^2 \neq 0$
- $A \neq 0$, prendre $\varepsilon = min(1, \frac{|A|}{|2B|}, \frac{|A|}{|2C|})$,
- $A = 0, B \neq 0$, prendre $\varepsilon = \frac{|B|}{|C|}$,
- $A = 0, B = 0$, n'importe quel ε positif convient.

Orientation totale sans perturbations

- Si $A \neq 0$ alors l'orientation est décidée par A,
- Si $A = 0$ et les points ont des abscisses différentes: le triangle est orienté si p, q, r (ou l'un de leur 3-cycles) sont ordonnés de coordonnées croissantes,
- Si $A = 0$ et les abscisses sont égales, alors même raisonnement avec les ordonnées,
- Les preuves effectuées ci-dessus assurent la correction de ce prédicat,
- Pas d'augmentation du degré!

Extraction de programmes

- Deux variantes robustes sans perturbations a été extraite,
- Les calculs numériques ont été instantciés avec l'arithmétique entière de ocaml,
- Expériences en cours pour utiliser la modularité d'Ocaml et de Coq.
- Technique de génération de code "certifié": fonctionnel pur.

Futures activités

- Projet ANR Galapagos: INRIA Sophia, Université de Strasbourg, Université de Poitiers, Ecole Normale Supérieure de Lyon, ENSIIE Evry,
- Formalisation d'algorithmes centrée sur les cartes combinatoires,
- Continuation des travaux en géométrie élémentaires et interfaces.