Euclide et Coq.

Jean Duprat
LIP.

1.Le point de départ.

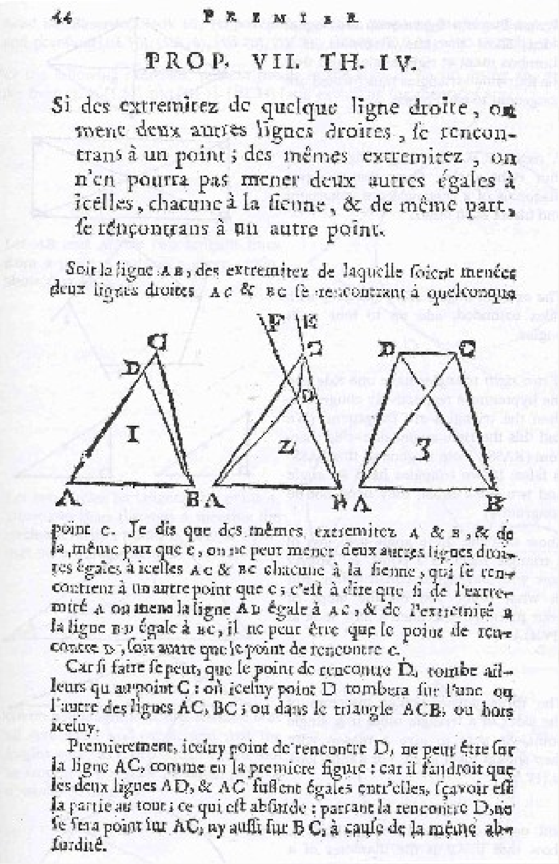
- Euclide.
- Hilbert.
- La construction de figure comme preuve.

Euclide (-325;-265).

- Œuvre :
  - Enseignant, fondateur de l'Ecole d'Alexandrie.
  - Collecte des notions connues à son époque.
  - Grande rigueur :
    - distinctions entre postulats et théorèmes (avant constatations).
    - problèmes posés en termes de constructions.
    - pas d'usage de nombres.

Les éléments.

- Base de l'enseignement des mathématiques jusqu'au XX^{e} siècle:
  - « Without the diligent studie of Euclides Elementes, it is impossible to attaine unto the perfecte knowledge of Geometrie, and consequently of any of the other Mathematical Sciences » Billingsley, English Translation 1570.
- 13 volumes !
  - 4 premiers : géométrie plane.
    - notion de point, de droite, de surface.
  - tome VI : similitude de figures.
  - 3 derniers : géométrie dans l'espace.



44 PREMIER

PROP. VII. TH. IV.

Si des extremitez de quelque ligne droite, on mene deux autres lignes droites, se rencontrans à un point; des mêmes extremitez, on n'en pourra pas mener deux autres égales à icelles, chacune à la sienne, & de même part, se rencontrans à un autre point.

Soit la ligne AB, des extremitez de laquelle soient menées deux lignes droites AC & BC se rencontrant à quelconque

point C. Je dis que des mêmes extremitez A & B, & de la même part que C, on ne peut mener deux autres lignes droites égales à icelles AC & BC chacune à la sienne, qui se rencontrent à un autre point que C; c'est à dire que si de l'extremité A on mene la ligne AD égale à AC, & de l'extremité B la ligne BD égale à BC, il ne peut être que le point de rencontre D, soit autre que le point de rencontre C.

Car si faire se peut, que le point de rencontre D, tombe ailleurs qu'au point C: où iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC, BC; ou dans le triangle ACB, ou hors iceluy.

Premierement, iceluy point de rencontre D, ne peut être sur la ligne AC, comme en la premiere figure: car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent égales entr'elles, sçavoir est la partie au tout; ce qui est absurde: partant la rencontre D, ne se fera point sur AC, ny aussi sur BC, à cause de la même absurdité.

David Hilbert (1862-1943).

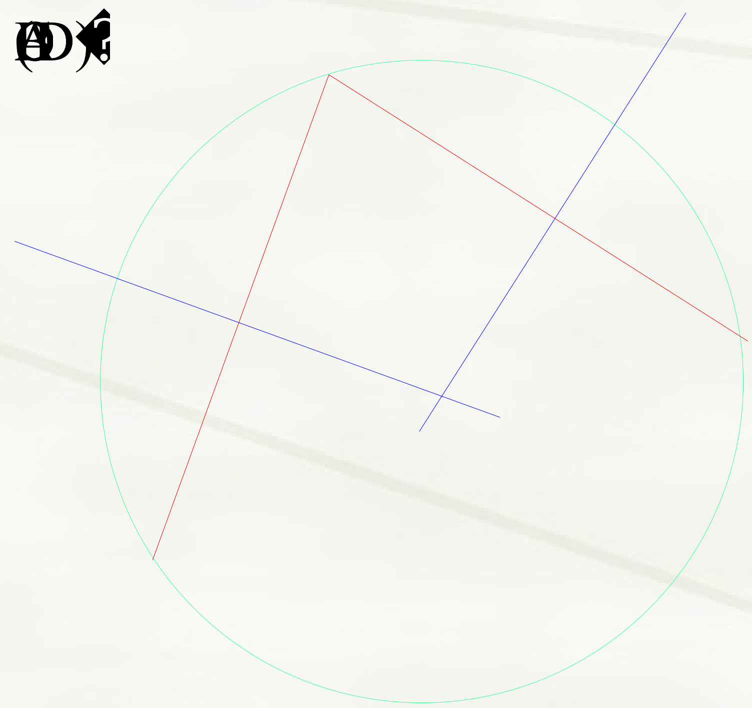
- Géométrie algébrique abstraite :
  - Nullstellensatz (th. des zéros de Hilbert).
- Grundlagen der Geometrie (1899):
  - axiomatique :
    - 21 axiomes regroupés de manière naturelle,
    - n'utilise pas d'éléments extérieurs,
    - système non-contradictoire, minimal et complet.

L'axiomatisation.

- 1. Axiomes d'incidence.
  - point, droite, plan, appartenance (incidence).
- 2. Axiomes d'ordre.
  - entre (between), axiome de Pasch, segments, demi-droites, orientation, ordre total et dense, angles.
- 3. Axiomes de congruence.
  - segments de même longueur, inégalité triangulaire, angles de même mesure, cas d'égalité des triangles, angle droit.
- 4. Axiomes de continuité.
  - Axiome d'Archimède, axiome de Cantor, droite réelle, repère cartésien.
- 5. Axiome de parallélisme.
  - Axiome d'Euclide, droites parallèles, plans parallèles.

Une construction comme preuve.

- Théorème de Bolyai :
  - Il existe un cercle passant par trois points non alignés.
    - Preuve :
      - Soient A, B, C non alignés.
      - A≠B et B≠C.
      - Soient D la médiatrice de [A,B] et D’ la médiatrice de [B,C].
      - (AB) et (BC) sont sécantes, D _|_ (AB), D’ _|_ (BC) donc D et D’ sont sécantes.
      - Soit O le point d’intersection de D et D’.
      - OA=OB et OB=OC.
      - Le cercle de centre O et de rayon OA répond à la question.



Algorithme géométrique.

- Une démonstration en géométrie contient :
  - des informations de type constructive (figure),
  - des informations de type déductive (propriétés).
- On peut extraire d'une preuve une construction (algorithme).
- C'est encore l'isomorphisme de Curry-Howard.

2. *A la recherche d'une géométrie…*

…où preuve et construction de figure à la règle et au compas sont menées de pair.

La règle et le compas.

- Définitions mutuellement inductives :
  - Point : Set :=

    | Origin, Unity : Point
    | InterLines : Line -> Line -> Point
    | InterLineCircle : Line -> Circle -> Point
    | InterCircles : Circle -> Circle -> Point
  - Line : Set :=

    | Ruler : Point -> Point -> Line
  - Circle : Set :=

    | Compass : Point -> Point -> Point -> Circle.

Problèmes.

- Ambiguïté :
  - multiplicité des points d'intersections.
- Précondition :
  - points distincts de construction d'une droite,
  - intersection de droites et de cercles sécants.
- Distinction :
  - deux points ayant des constructions différentes ne sont pas nécessairement distincts.

Levée d'ambiguïté.

- Il suffit de multiplier les constructeurs :
  - Exemple, deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) sécants :
    - intersection à droite de la droite des centres (C_1C_2),
    - intersection à gauche de la droite des centres (C_1C_2).

Préconditions.

- Modifications des définitions :
  - Point : Set :=
    ```
    | Origin, Unity : Point
    | InterLines : ∀ D1 D2 : Line,
                        SecantLines D1 D2 -> Point
    | InterLineCircle : ∀ D : Line, ∀ G : Circle,
                        SecantLineCircle D G -> Point
    | InterCircles : ∀ G1 G2 : Circle,
                        SecantCircles D1 D2 -> Point
    ```
  - Line : Set :=
    ```
    | Ruler : ∀ A B : Point, DistinctPoint A B -> Line
    ```
  - Circle : Set :=
    ```
    | Compass : Point -> Point -> Point -> Circle.
    ```
- Mais il faut aussi définir ces propriétés.

Ajout de définitions.

- On voudrait :
  - Point : Set := …
  - Line : Set := …
  - Circle : Set := …
  - DistinctPoint : Point -> Point -> Prop := …
  - SecantLines : Line -> Line -> Prop := …
  - SecantLineCircle : Line -> Circle -> Prop := …
  - SecantCircles : Circle -> Circle -> Prop := …
- Mais Coq interdit ce genre de définitions mutuellement inductives mélangeant Set et Prop.

Une solution ?

- Casser l'induction mutuelle :
  - Axiom Point : Set.
  - Definition DistinctPoint : Point -> Point -> Prop := …
  - Definition Line : Set := …
  - Definition Circle : Set := …
  - Definition SecantLines : Line -> Line -> Prop := …
  - Definition SecantLineCircle : Line -> Circle -> Prop := …
  - Definition SecantCircles : Circle -> Circle -> Prop := …
  - Definition Intersection : Set := …
  - Axiom PointDef : Intersection -> Point.
- La cohérence demeure-t-elle ?

Points distincts.

- On construit tous les points constructibles à la règle et au compas du plan euclidien une infinité de fois différemment !
  - C'est contradictoire avec une définition inductive en Coq (tactique discriminate permet de démonter $0 \neq 1$ car 0 est construit par O et 1 par S O).
- La solution précédente contourne ce problème, mais
  - La fonction PointDef qui associe un point à chaque intersection, associe le même point à nombre d'intersections.
  - Il faut pouvoir résoudre :
    - A = Intersection F1 F2,
    - B = Intersection F3 F4,
    - PointDef A = PointDef B.

Propriétés caractéristiques.

- On associe une propriété à chaque intersection :
  - Exemples :
    - Intersection des droites sécantes (D1) et (D2) :
      - fun M : Point => M $\in$ (D1) $\wedge$ M $\in$ (D2)
    - Intersection des cercles sécants (Γ 1) et (Γ 2) :
      - fun M : Point => M $\in$ (Γ 1) $\wedge$ M $\in$ (Γ 2) $\wedge$ M à droite de (C1C2).
- On associe une propriété d'égalité à chaque point défini par intersection :
  - Exemples :
    - I = PointDef (D1) $\cap$ (D2),
      $\forall$N : Point, N $\in$ (D1) $\wedge$ N $\in$ (D2) $\Rightarrow$ N = I.
    - I = PointDef (Γ 1) $\cap$ (Γ 2),
      $\forall$N : Point, N $\in$ (Γ 1) $\wedge$ N $\in$ (Γ 2) $\wedge$ N à droite de (C1C2) $\Rightarrow$ N = I.

3. *Définition de la géométrie plane euclidienne.*

- Les points.
- L’orientation.
- La métrique.
- Les droites.
- Les cercles.
- Les intersections.

Le plan.

- Parameter
  - **Point** : Set.
- Axiom
  - **Oo** : Point.
  - **Uu** : Point.
  - **DistinctOoUu** : Oo <> Uu.

- Definition
  - **Figure** := Ensemble Point.
  - **SubFigure** := Included Point.
  - **Unicity** :=
    fun (M:Point) (F : Figure) =>
    forall N, F N -> M = N.
- Inductive
  - **SuperImposed** (F1 F2 : Figure) : Prop :=
    | **SuperImposedDef** :
    SubFigure F1 F2 ->
    SubFigure F2 F1 ->
    SuperImposed F1 F2.

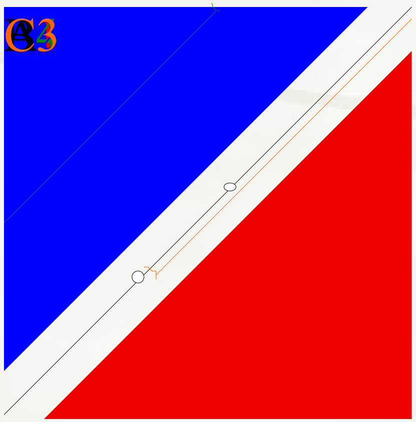
L'orientation.

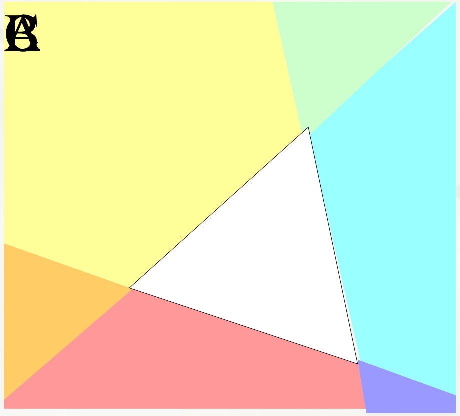
- Parameter
  - **Clockwise** : Point -> Point -> Point -> Prop.

- Definition
  - **HalfPlane** (A B : Point) := Clockwise A B.
    - Remarque A = B -> ensemble vide.
  - **EquiOriented** (A B C D) := forall M, Clockwise A B M -> Clockwise C D M.
  - **EquiDirected** := fun A B C D => EquiOriented A B C D \/ EquiOriented …
  - **OpenRay** (A B) := EquiOriented A B A.
    - Remarque A ≠ B -> A ≠ M.
  - **ClosedRay** (A B) := fun M => EquiOriented A M A B.
  - **Collinear** (A B C) := ~Clockwise A B C /\ ~Clockwise B A C.
  - **Between** (A B C) := A <> B /\ EquiOriented A B B C.
  - **ClosedBetween** (A B C) := ClosedRay A C B /\ ClosedRay C A B.

Axiomes d’orientation.

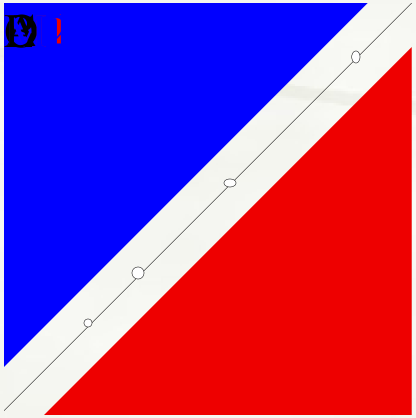
- Axiom
  - **ClockwiseAntisym** : forall A B C,
    ~Clockwise A B C \/
    ~Clockwise B A C.
  - **ClockwisePerm** : forall A B C,
    Clockwise A B C ->
    Clockwise B C A
  - **FourCases** : forall A B C,
    Clockwise A B C \/
    Clockwise B A C \/
    OpenRay A B C \/
    OpenRay B A C.
    - Remarque : logique classique (≈tiers exclu)
  - **FourthPoint** : forall A B C,
    Clockwise A B C ->
    Clockwise A B D \/
    Clockwise A D C \/
    Clockwise D B C.
    - Remarque : planarité (≈Pasch)

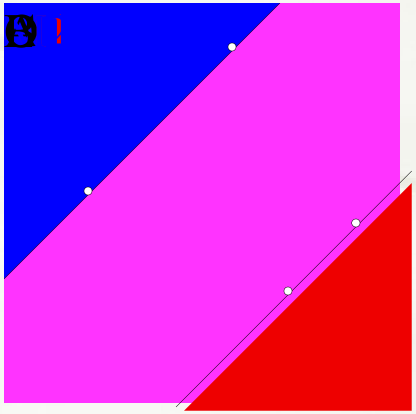




Axiomes d'orientation.

- Axiom
  - **ChangeSense** : forall A B C D,
    EquiOriented A B C D ->
    Collinear A B C ->
    EquiOriented B A D C.
    - Remarque : il n'y a que deux orientations.
  - **ChangeSide** : forall A B C D,
    EquiOriented A B C D ->
    A <> B ->
    EquiOriented D C B A.
    - Remarque : parallélisme.





La métrique.

- Parameter
  - Equidistant :
    Point -> Point -> Point -> Point -> Prop.

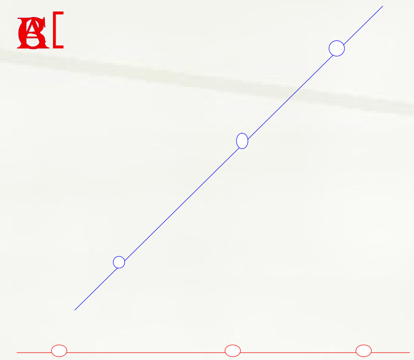
- Inductive
  - Archimed (A B) : Point -> Prop :=
    | ArchimedBase : forall C,
        EquiOriented A C C B -> Archimed A B C
    | ArchimedRec : forall C D,
        EquiOriented A B D C -> EquiDistant A BD C -> Archimed A B D ->
        Archimed A B C.
- Definition
  - TriangleInequality := fun A B C D E F =>
    exists G, exists H, exists I, exists J,
        Between G H I /\ EquiDistant A B G H /\ EquiDistant C D H I /\
        Between G J I /\ EquiDistant E F G J.

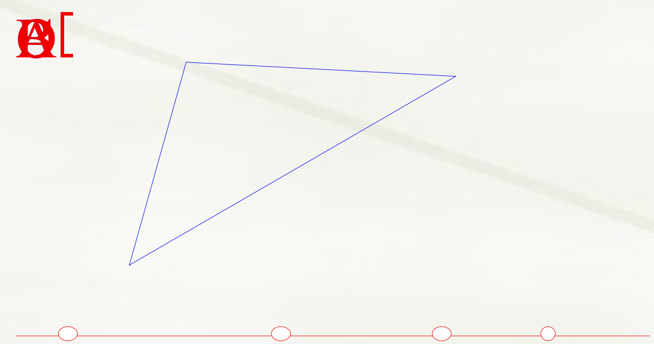
Axiomes d’équidistance.

- Axiom
  - **EquiDistantRefl** : forall A B, EquiDistant A B A B.
  - **EquiDistantSymTrans** : forall A B C D E F,
    EquiDistant A B C D -> EquiDistant A B E F ->
    EquiDistant C D E F.
    - Remarque : relation d’équivalence sur les bipoints.
  - **EquiDistantAABB** : forall A B, EquiDistant A A B B.
    - Remarque : distance nulle.
  - **EquiDistantABBA** : forall A B, EquiDistant A B B A.
    - Remarque : symétrie de la distance.
  - **EquiDistantArchimed** : forall A B C,
    A <> B -> ClosedRay A B C -> Archimed A B C.
    - Remarque : la distance est archimédienne.

Axiomes d'équidistance.

- Axiom
  - **EquiDistantEquiOriented** :
    forall A B C A' B' C',
    EquiOriented A B B C ->
    EquiDistant A B A' B' ->
    EquiDistant A C A' C' ->
    OpenRay A' B' C' ->
    EquiOriented A' B' B' C'.
    - Remarque : conservation de l'ordre.
  - **EquiDistantTriangle** :
    forall A B C A' B' C' D',
    Clockwise A B C ->
    OpenRay A' B' C' ->
    OpenRay A' B' D' ->
    EquiDistant A B A' B' ->
    EquiDistant B C B' C' ->
    EquiDistant A C A' D' ->
    Between A' D' C'.
    - Remarque : inégalité triangulaire.

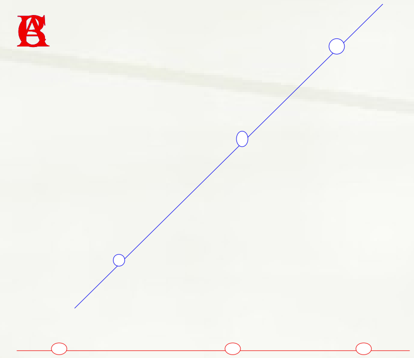




Axiomes d'équidistance.

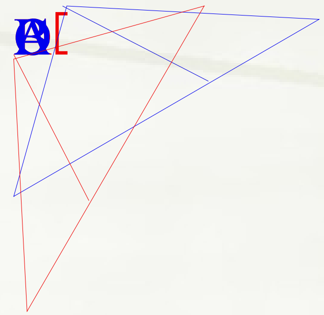
- Axiom
  - **EquiDistantChasles** :
    forall A B C A' B' C',
    ClosedBetween A B C ->
      ClosedBetween A' B' C' ->
      EquiDistant A B A' B' ->
      EquiDistant B C B' C' ->
      EquiDistant A C A' C'.

  - **ChaslesEquiDistant** :
    forall A B C A' B' C',
    ClosedBetween A B C ->
      EquiDistant A B A' B' ->
      EquiDistant B C B' C' ->
      EquiDistant A C A' C' ->
      ClosedBetween A' B' C'.

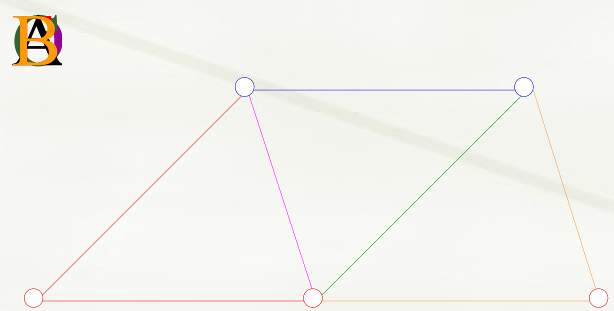


Axiomes d'équidistance.

- Axiom
  - **EquiDistantAngle** :
    forall A B C D A' B' C' D',
    ClosedRay A B D ->
    ClosedRay A' B' D' ->
    EquiDistant A B A' B' ->
    EquiDistant A C A' C' ->
    EquiDistant B C B' C' ->
    EquiDistant A D A' D' ->
    EquiDistant C D C' D'.
    - Remarque : transport d'un angle.



  - **EquiDistantSumAngles** :
    forall A B C D E,
    Clockwise A B C ->
    Clockwise A C D ->
    Clockwise A D E ->
    EquiDistant A B D C ->
    EquiDistant B C A D ->
    EquiDistant A E C D ->
    EquiDistant D E C A ->
    Between B A E.
    - Remarque : somme des angles d'un triangle (unicité de la parallèle).



La droite.

- Inductive
  - **Line** : Set :=
    | **Ruler** : forall A B : Point, A <> B -> Line.

- Definition
  - **LineA** := fun D : Line => let (A, _, _) := D in A.
  - **LineB** := fun D : Line => let (_, B, _) := D in B.
  - **LineH** : forall D : Line, LineA D <> LineB D.
  - **OnLine** (D : Line) := let (A,B,_) := D in Collinear A B.
  - **IsLine** (F : Figure) := {D : Line | SuperImposed F (OnLine D)}.
  - **ParallelLines** (D1 D2 : Line) := EquiDirected (LineA D1) (LineB D1) (LineA D2) (LineB D2).
  - **SecantLines** (D1 D2 : Line) := ~ParallelLines D1 D2.
  - **O__U** := Ruler Oo Uu DistinctOoUu.

Le cercle.

- Inductive
  - **Circle** : Set :=
    | **Compass** : forall C A B : Point, Circle.

- Definition
  - **Center** := fun G : Circle => let (C, _, _) := G in C.
  - **RadiusA** := fun G : Circle => let (_, A, _) := G in A.
  - **RadiusB** := fun G : Circle => let (_, _, B) := G in B.

  - **OnCircle** (G : Circle) := let (C, A, B) := G in (fun M : Point => EquiDistant C M A B).
  - **IsCircleB** (F : Figure) := {G : Circle | SuperImposed F (OnCircle G)}.

  - **TriangleSpec** := fun A B C D E F =>
    TriangleInequality A B C D E F /\ TriangleInequality C D E F A B /\ TriangleInequality E F A B C D.
  - **SecantCircles** (G1 G2 : Circle) :=
    TriangleSpec (Center G1) (Center G2) (RadiusA G1) (RadiusB G1) (RadiusA G2) (RadiusB G2).

  - **Diameter** (D : Line) (G : Circle) := OnLine D (Center G).

Les intersections.

- Inductive
  - **Intersection** : Figure -> Prop :=

```
| InterLines : forall D1 D2 : Line,
      SecantLines D1 D2 ->
      Intersection (fun M : Point => OnLine D1 M /\ OnLine D2 M)
| InterCircles : forall G1 G2 : Circle,
      SecantCircles G1 G2 ->
      Intersection (fun M : Point => OnCircle G1 M /\
            OnCircle G2 M /\ Clockwise (Center G1) (Center G2) M)
| InterDiameter : forall (D : Line) (G : Circle),
      Diameter D G ->
      Intersection (fun M : Point => OnCircle G M /\
            EquiOriented (Center G) M (LineA D) (LineB D)).
```

    - *Une figure n'est une intersection que dans les trois cas énumérés.*

- Axiom
  - **PointDef** : forall F : Figure, Intersection F -> {M : Point | F M /\ Unicity M F}.
    - *Lorsqu'une figure est une intersection, elle contient un unique point.*

Quelle géométrie a-t-on construit ?

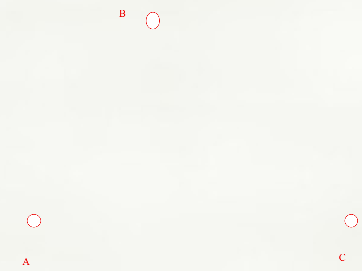
- Il a été prouvé en Coq :
  - de ce système, se déduisent tous les axiomes de Hilbert à l’exception de celui de continuité.

- La réciproque :
  - ne peut se faire que dans Prop,
    - ce qui suffirait à garantir que les axiomes ne sont pas incohérents entre eux,
  - mais la question de savoir si :
    - l’utilisation non orthodoxe de Prop, Set et d’axiomes n’introduit pas d’incohérence reste entière

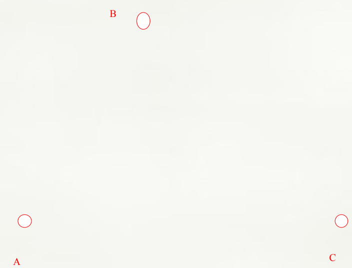
4.L’objectif.

Un exemple : le théorème de Bolyai.

Enoncé.

<table>
<tr><td>Hypothヾses
A un point
B un point
C un point
H0 : A B C non alignホs</td><td>Figure

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusion
1/1 : A B C cocycliques ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Raisonnement
Soit Dmホdiatrice de A B.</td></tr>
</table>

Démonstration.

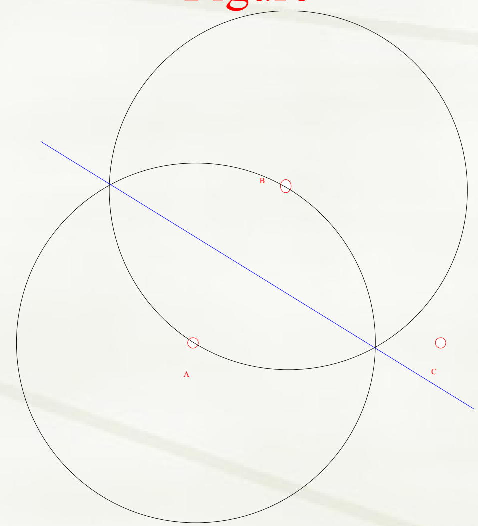
<table>
<tr><td>Hypothマses
A un point
B un point
C un point
H0 : A B C non alignホs</td><td>Figure
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusion
1/2 : A et B distincts ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Raisonnement
▪ Car H0</td></tr>
</table>

Démonstration.

Hypothマses

A un point
B un point
C un point
H0 : A B C non align朩s
D : m朩diatrice de A et B

Figure



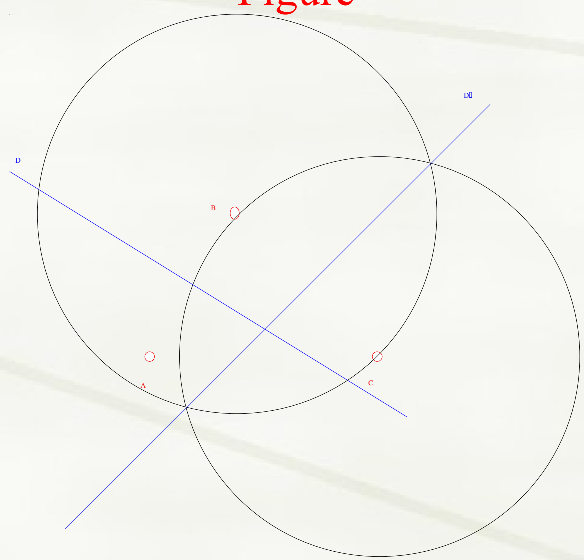
Conclusion

1/1 : A B C cocycliques ?

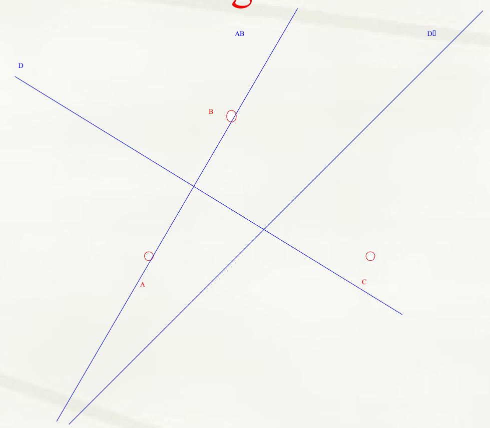
Raisonnement

□Doit D�m朩diatrice de B et C.

Démonstration.

<table>
<tr><td>Hypothèses
A, B, C : points
H0 : A B C non alignés
H1 : A ≠ B
D : droite
H2 : D médiatrice de A et B
H3 : B ≠ C
D' : droite
H4 : D' médiatrice de B et C</td><td>Figure
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusion
1/1 : A B C cocycliques ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Raisonnement
Soit AB la droite passant par A et B.</td></tr>
</table>

Démonstration.

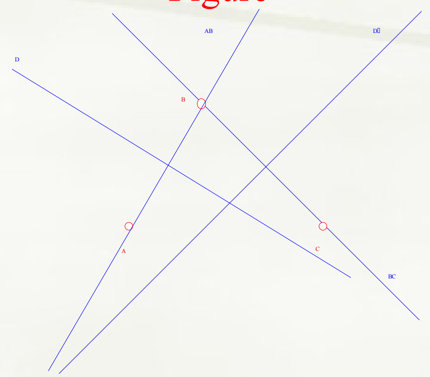
<table>
<tr><td>Hypothèses
A, B, C : points
H0 : A B C non alignés
H1 : A ≠ B
D : droite
H2 : D médiatrice de A et B
H3 : B ≠ C
D' : droite
H4 : D' médiatrice de B et C
AB : droite
H5 : A sur AB
H6 : B sur AB</td><td>Figure

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusion
1/1 : A B C cocycliques ?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Raisonnement
D est perpendiculaire à AB car H2.</td></tr>
</table>

Démonstration.

Hypothヾses

A, B, C : points
H0 : A B C non alignホs
H1 : A B
D : droite
H2 : D mホdiatrice de A et B
H3 : B ▪C
D : droite
H4 : D ▪mホdiatrice de B et C
AB : droite
H5 : A sur AB
H6 : B sur AB
H7 : D est perpendiculaire ネ AB
BC: droite
H8 : B sur BC
H9 : C sur BC
H10 : D ▪est perpendiculaire ネ BC

Figure



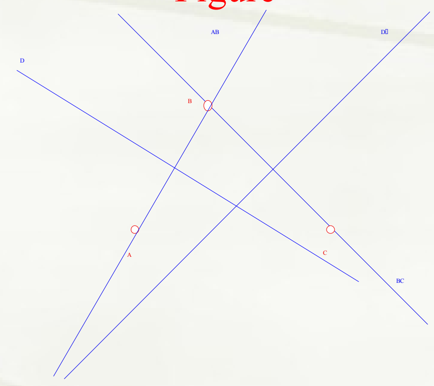
Conclusion

1/1 : A B C cocycliques ?

Raisonnement

AB et BC sont sホcantes car B est un point commun et C nest pas sur AB.

Démonstration.

Hypothヾses	Figure
A, B, C : points H0 : A B C non alignホs H1 : A ▯ B D : droite H2 : D mホdiatrice de A et B H3 : B ▪C D▯: droite H4 : D ▪mホdiatrice de B et C AB : droite H5 : A sur AB H6 : B sur AB H7 : D est perpendiculaire ネ AB BC: droite H8 : B sur BC H9 : C sur BC H10 : D ▪est perpendiculaire ネ BC H11 : AB et BC sont sホcantes	

Conclusion

1/1 : A B C cocycliques ?

Raisonnement

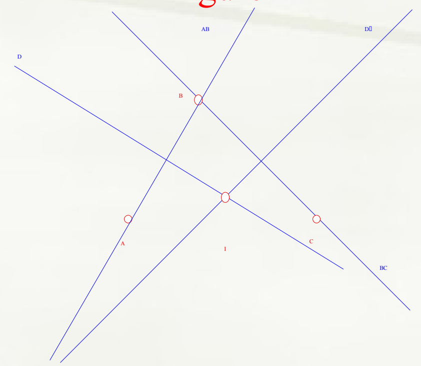
□SoitI lepoint d▯intersecdn deD etD�.

Démonstration.

Hypothèses

A, B, C : points
H0 : A B C non alignés
H1 : A ≠ B
D : droite
H2 : D médiatrice de A et B
H3 : B ≠ C
D' : droite
H4 : D' médiatrice de B et C
AB : droite
H5 : A sur AB
H6 : B sur AB
H7 : D est perpendiculaire à AB
BC: droite
H8 : B sur BC
H9 : C sur BC
H10 : D' est perpendiculaire à BC
H11 : AB et BC sont sécantes
I : Point
H12 : D et D' sont sécantes
H12 : I sur D
H13 : I sur D'

Figure



Conclusion

1/1 : A B C cocycliques ?

Raisonnement

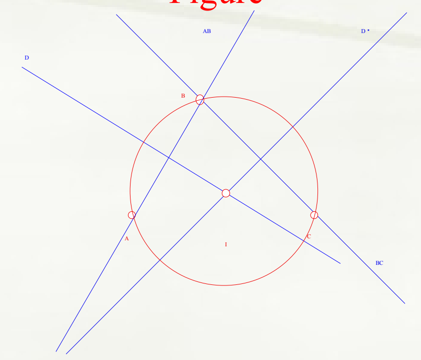
Soit G le cercle de centre I et de rayon IA.

Démonstration.

Hypothèses

A, B, C : points
H0 : A B C non alignés
H1 : A ≠ B
D : droite
H2 : D médiatrice de A et B
H3 : B ≠ C
D' : droite
H4 : D' médiatrice de B et C
AB : droite
H5 : A sur AB
H6 : B sur AB
H7 : D est perpendiculaire à AB
BC: droite
H8 : B sur BC
H9 : C sur BC
H10 : D' est perpendiculaire à BC
H11 : AB et BC sont sécantes
I : Point
H12 : D et D' sont sécantes
H12 : I sur D
H13 : I sur D'
G : cercle de centre I de rayon IA

Figure



Conclusion

1/1 : A B C cocycliques ?

Raisonnement

Car A sur G et B sur G et C sur G.

5. *En guise de conclusion…*

La poursuite des travaux.

La poursuite des travaux.

- Théorique :
  - garantir la cohérence (je ne sais pas faire)
    - éventuellement inventer un autre calcul que le calcul des constructions dans laquelle une telle théorie serait naturelle.
- Le logiciel :
  - développer en Coq les objets géométriques :
    - triangles, droites remarquables, …
  - développer les tactiques correspondants aux étapes courantes du raisonnement.
- L’interface :
  - les fenêtres hypothèses et conclusion
    - traduction en français de l’environnement et du but.
  - la fenêtre figure
    - dessin en GeoGebra à partir de l’environnement.
  - la fenêtre raisonnement
    - traduction en français des tactiques.
  - Eventuellement :
    - une fenêtre des théorèmes applicables,
    - une édition du problème résolu avec énoncé, figure et démonstration.