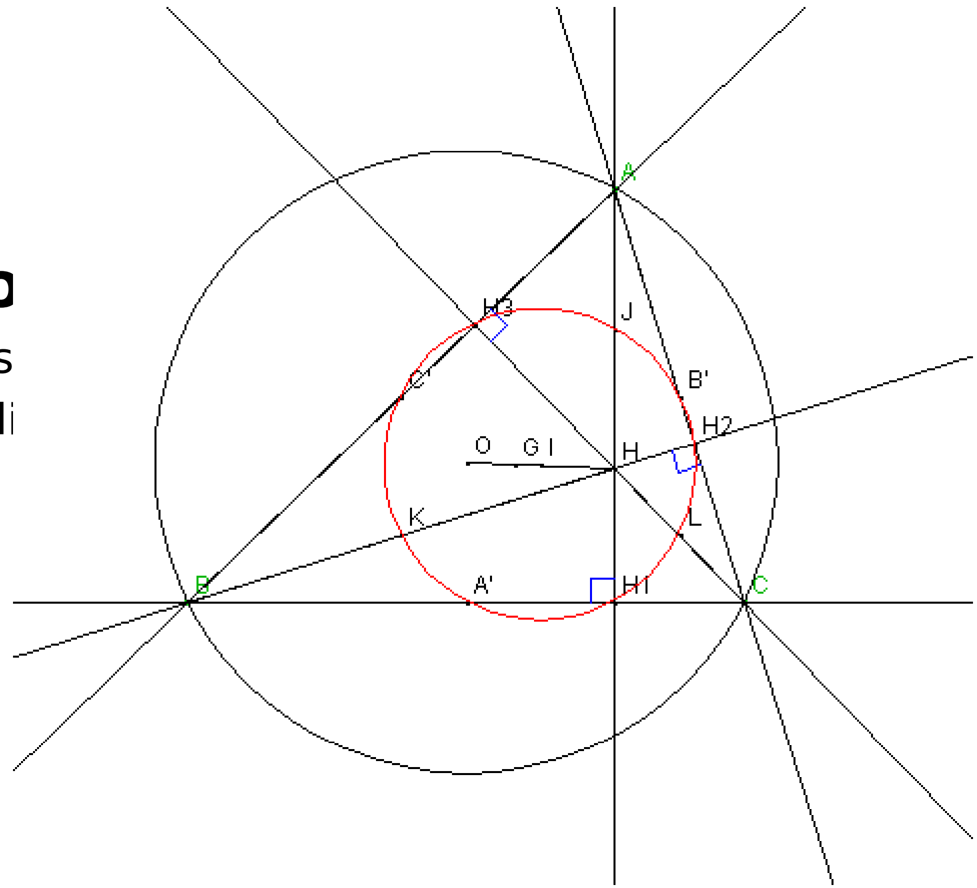
Formalisation en Coq de la géométrie du lycée

Frédérique Guilho

Professeur de mathématiques

Marelle - INRIA Sophia Antipoli



Réunion Galapagos

(21 janvier 2008)

Motivations

- **But**
  outil pour l'enseignement des démonstrations au lycée

- **Formalisation**
  définitions, théorèmes et démonstrations « comme au lycée » (contrainte forte)

- **Accessibilité**

  - réduire la distance entre texte formel et texte naturel

  - utilisation de figures dynamiques

La géométrie affine euclidienne enseignée au lycée

- objets : points, droites, plans, cercles etc. approche axiomatique à la "grecque"
- calcul vectoriel dans le plan et l'espace
- barycentres dans le plan et l'espace
- produit scalaire dans le plan et l'espace
- transformations géométriques : translations, homothéties, projections, symétries, rotations etc.
- géométrie analytique
- nombres complexes et applications

Système formel utilisé

calcul vectoriel «prolongé » à l'ensemble des points pondérés

sommes vectorielles de Liebniz

soient a et b deux réels et l'application

$$f_{a,b} : M \mapsto \overrightarrow{V(M)} = a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB}$$

$*$ si $a+b=0$, $f_{a,b}$ est constante car

$$\forall\, M,\ \ a\,\overrightarrow{MA} - a\,\overrightarrow{MB} = a\,\overrightarrow{BA}$$

$*$ si $a+b\neq 0$ et G est le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b)

$$\forall\, M,\ \ a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = (a+b)\,\overrightarrow{MG}$$

somme de 2 points pondérés

soient a et b deux réels, on définit la somme

$$S = a\,A + b\,B$$

$*$ si $a+b=0$

$$a\,A - a\,B = a\,\overrightarrow{BA}$$

$*$ si $a+b\neq 0$ et G est le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b)

$$a\,A + b\,B = (a+b)\,G$$

intérêts :

- calculs en dimension quelconque
- ensemble muni d'une structure d'espace vectoriel

Formalisation en Coq

les objets primitifs en Coq

- les types : **PO** (points) et **PP** (points pondérés et vecteurs)
- **add_PP** : PP->PP->PP (addition)
- **mult_PP** : R->PP->PP (multiplication par un réel)

- **cons** : R->PO->PP (constructeur de points pondérés)
- **vec** : PO->PO->PP (constructeur de vecteurs)

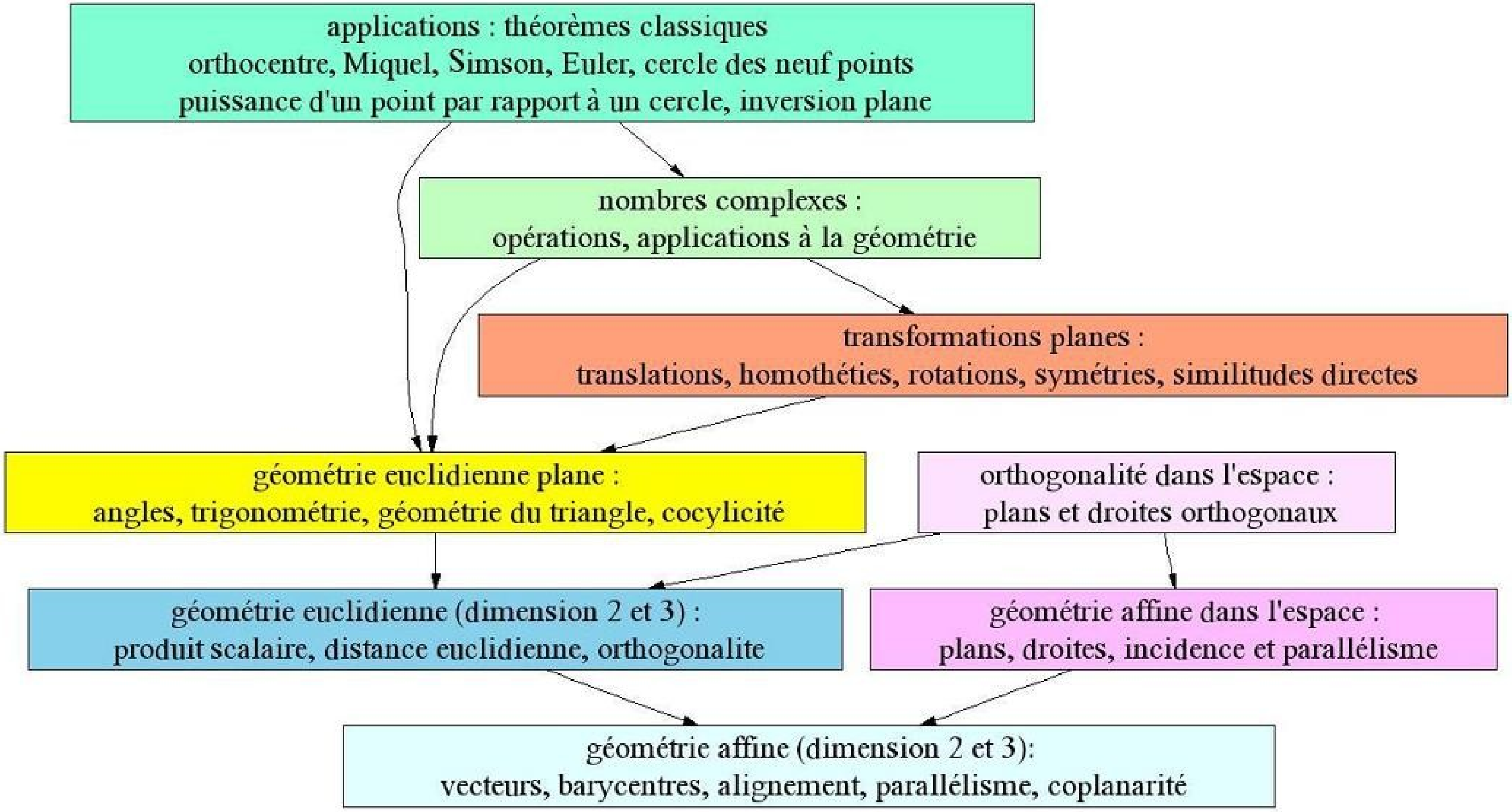
- axiomes pour formaliser l'espace vectoriel

les ressources de Coq utilisées

- les bibliothèques **Reals** et **Fourier**
- les tactiques **ring** et **field** pour simplifier les calculs dans PP

Développement en Coq

(contribution utilisateur Coq)



Interface graphique : Pcoq

affichage : formules mathématiques et langage pseudo-naturel

Énoncé en coq

```
Lemma isocele_mediane_bissectrice :
 forall A B C I : PO,
 A <> I ->
 B <> C ->
 I = milieu B C ->
 isocele A B C ->
 cons_AV (vec A B) (vec A I) = cons_AV
     (vec A I) (vec A C).
```

Affichage à l'écran (Pcoq)

Propriété **isocele_mediane_bissectrice** :

Soient A, B, C et I des points.

Si $A \neq I$,

$B \neq C$,

I est le milieu du segment [B C],

et A B C est un triangle isocèle en A

alors $(\overrightarrow{A\,B}, \overrightarrow{A\,I}) = (\overrightarrow{A\,I}, \overrightarrow{A\,C})$.

GeoView : outil de construction intégré à l’interface Pcoq

http://www-sop.inria.fr/lemme/geoview/geoview-fra.html

- énoncé formel d'un théorème de géométrie plane
- calcul de l'ordre des constructions
- applet java **GeoplanJ** (auteur : Frédéric Kotecki, CNAM)

Théorème **deux_isocele_rectangle_direct:**

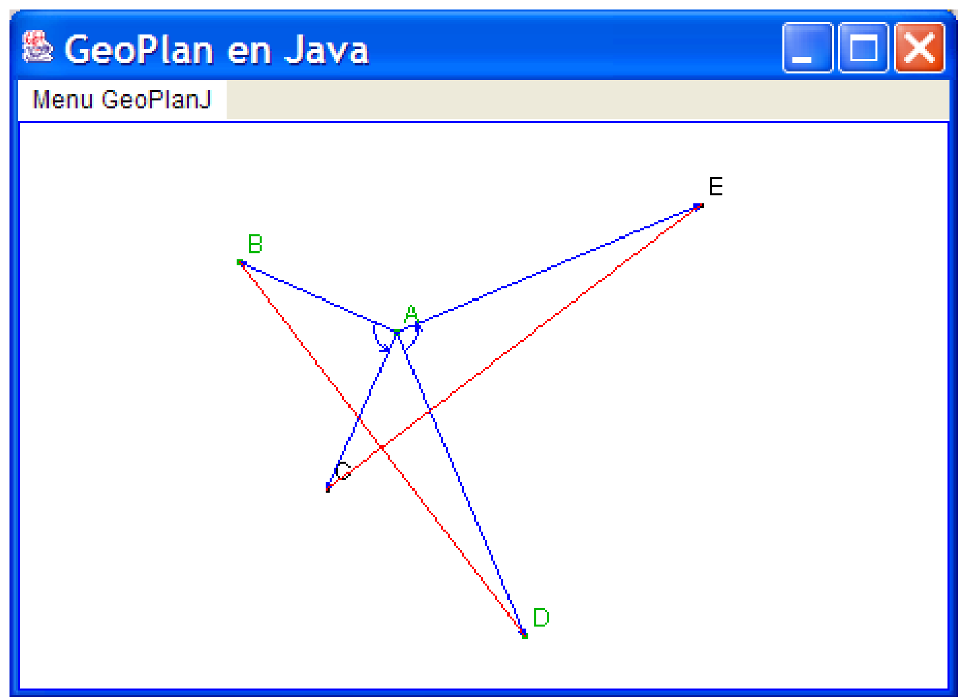
Soient A, B, C, D et E des points.

Si **B est distinct de D,**

ABC est un triangle isocèle rectangle direct en A,

et ADE est un triangle isocèle rectangle direct en A

alors **BD = CE et** $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \widehat{\pi/2}$.



Difficultés rencontrées

- **niveau de détail dans les preuves formelles**
  en mathématiques, on fait la différence entre les arguments "essentiels" et ceux qui sont "évidents" au niveau où on se place

- **gestion des conditions de bord**
  exemple : représentation des droites
  la droite (AB) existe ssi A<>B
  la droite (CD) est confondue avec (AB) si C<>D et C et D sont alignés avec A et B

- **gestion des cas dégénérés**
  points confondus ou points alignés
  cas générique partie mineure de la preuve formelle

Conclusions temporaires

Les plus

- bibliothèque de géométrie couvrant le programme du lycée
- « imiter » les techniques de démonstrations du lycée
- preuves de théorèmes non triviaux : Le cercle des neuf points, Simson, Morley, inversion géométrique …
- obtenir des énoncés et des figures accessibles

Les moins

- difficultés de la diapo précédente
- accessibilité des preuves (saisie et affichage)

Perspectives

Travail à faire en coq

- lien avec les autres formalisations de géométrie
- utilisation d'un démonstrateur automatique

Interfaces graphiques

- prolonger le travail fait avec l'interface Pcoq (formules mathématiques et texte pseudo-naturel)
- boite à outil pour écrire des preuves (menus etc…)
- explications en langage naturel des preuves formelles
- mariage de Coq avec un logiciel de géométrie du type GeoGebra (preuve et figure)