Introduction à la définition

Structure d'algèbre

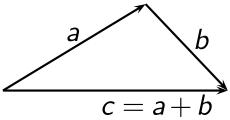
1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
   Ensemble de vecteurs, munis d'opérations sur les vecteurs :

Introduction à la définition

Structure d'algèbre

1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
   Ensemble de vecteurs, munis d'opérations sur les vecteurs :

   - Addition de vecteurs : «$+$»

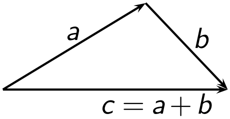


Introduction à la définition

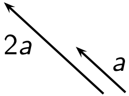
Structure d'algèbre

1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
   Ensemble de vecteurs, munis d'opérations sur les vecteurs :

   - Addition de vecteurs : «$+$»



   - Multiplication par les scalaires
     Distributive sur l'addition : $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

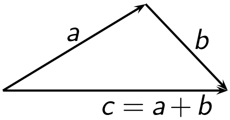


Introduction à la définition

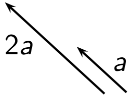
Structure d'algèbre

1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
   Ensemble de vecteurs, munis d'opérations sur les vecteurs :

   - Addition de vecteurs : «$+$»



   - Multiplication par les scalaires
     Distributive sur l'addition : $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$



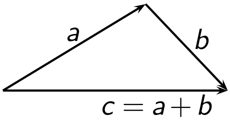
2. Produit des vecteurs de $\mathbb{R}^n$: «$*$»
   Bilinéaire : $(\alpha a + \beta b) * c = \alpha(a * c) + \beta(b * c)$

Introduction à la définition

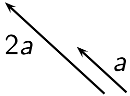
Structure d'algèbre

1. Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
   Ensemble de vecteurs, munis d'opérations sur les vecteurs :

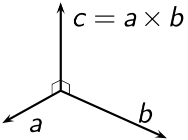
   - Addition de vecteurs : «$+$»



   - Multiplication par les scalaires
     Distributive sur l'addition : $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$



2. Produit des vecteurs de $\mathbb{R}^n$: «$*$»
   Bilinéaire : $(\alpha a + \beta b) * c = \alpha(a * c) + \beta(b * c)$
   Exemple : le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$: «$\times$»



Introduction à la définition

L'algèbre de Grassmann sur $\mathbb{R}^n$: $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Le produit extérieur «$\wedge$»

- Associatif : $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c,\ a, b, c \in \mathbb{R}^n$
- Anticommutatif : $a \wedge b = -b \wedge a$

Introduction à la définition

L'algèbre de Grassmann sur $\mathbb{R}^n$: $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Le produit extérieur «$\wedge$»

- Associatif : $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c, \ a, b, c \in \mathbb{R}^n$
- Anticommutatif : $a \wedge b = -b \wedge a \longrightarrow$ $\boxed{\text{2-vecteur décomposable}}$

Introduction à la définition

L'algèbre de Grassmann sur $\mathbb{R}^n$: $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Le produit extérieur «$\wedge$»

- Associatif : $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c, \; a, b, c \in \mathbb{R}^n$
- Anticommutatif : $a \wedge b = -b \wedge a \longrightarrow$ 2-vecteur décomposable

Éléments de l'espace de l'algèbre de Grassmann $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$.

Les *k*-vecteurs

- Le produit de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un k-vecteur décomposable
  Exemple : $a \wedge b$: 2-vecteur décomposable, $a, b \in \mathbb{R}^n$

Introduction à la définition

L'algèbre de Grassmann sur $\mathbb{R}^n$: $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Le produit extérieur «$\wedge$»

- Associatif : $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c, \; a, b, c \in \mathbb{R}^n$
- Anticommutatif : $a \wedge b = -b \wedge a \longrightarrow$ $\boxed{\text{2-vecteur décomposable}}$

Éléments de l'espace de l'algèbre de Grassmann $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$.

Les *k*-vecteurs

- Le produit de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un k-vecteur décomposable
- Un k-vecteur général est une somme de k-vecteurs décomposables

Exemples :	0-vecteurs :	ensemble des scalaires $\mathbb{R}$
	1-vecteurs :	ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$
	2-vecteur :	$a \wedge b + c \wedge d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$

Introduction à la définition

L'algèbre de Grassmann sur $\mathbb{R}^n$: $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Le produit extérieur «$\wedge$»

- Associatif : $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c, \; a, b, c \in \mathbb{R}^n$
- Anticommutatif : $a \wedge b = -b \wedge a$ → $\boxed{\text{2-vecteur décomposable}}$

Éléments de l'espace de l'algèbre de Grassmann $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$.

Les k-vecteurs

- Le produit de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un k-vecteur décomposable
- Un k-vecteur général est une somme de k-vecteurs décomposables

Les multivecteurs

Un multivecteur général est une somme de k-vecteurs, k dans $[0; n]$

Exemple : $4 + a + b \wedge d + a \wedge c \wedge d, \; a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$

Interprétation

Représenter des variétés linéaires

Géométrie ➜ Espace «géométrique» (ensemble de points)

➥ Interprétation : multivecteurs ➜ objets géométriques

Interprétation

Représenter des variétés linéaires

Géométrie ➜ Espace «géométrique» (ensemble de points)
➥ Interprétation : multivecteurs ➜ objets géométriques

Soit l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

- Points de $\mathbb{P}^n$ ➜ vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$

Interprétation

Représenter des variétés linéaires

Géométrie ➜ Espace «géométrique» (ensemble de points)

➥ Interprétation : multivecteurs ➜ objets géométriques

Soit l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

- Points de $\mathbb{P}^n$ ➜ vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$

Considérons l'algèbre $\bigwedge(\mathbb{R}^{n+1})$

Interprétation

Représenter des variétés linéaires

Géométrie ➜ Espace «géométrique» (ensemble de points)

➥ Interprétation : multivecteurs ➜ objets géométriques

Soit l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

- Points de $\mathbb{P}^n$ ➜ vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$

Considérons l'algèbre $\bigwedge(\mathbb{R}^{n+1})$

Variétés linéaires

a : 1-vecteurs $\longrightarrow$ points

$\bullet\, a$

Interprétation

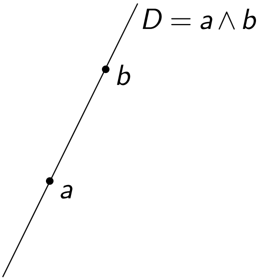
Représenter des variétés linéaires

Géométrie ➜ Espace «géométrique» (ensemble de points)
➥ Interprétation : multivecteurs ➜ objets géométriques

Soit l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

- Points de $\mathbb{P}^n$ ➜ vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$

Considérons l'algèbre $\bigwedge(\mathbb{R}^{n+1})$



Variétés linéaires

a, b	:	1-vecteurs	$\longrightarrow$	points
$a \wedge b$	:	2-vecteur	$\longrightarrow$	droite

Interprétation

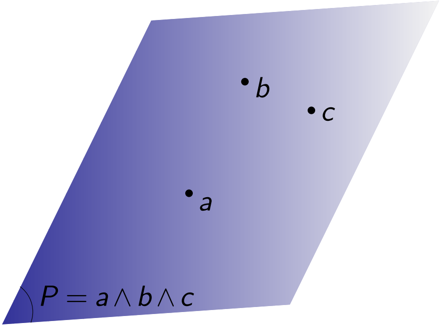
Représenter des variétés linéaires

Géométrie ➜ Espace «géométrique» (ensemble de points)
➥ Interprétation : multivecteurs ➜ objets géométriques

Soit l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

- Points de $\mathbb{P}^n$ ➜ vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$

Considérons l'algèbre $\bigwedge(\mathbb{R}^{n+1})$



Variétés linéaires

a, b, c :	1-vecteurs	$\longrightarrow$	points
$a \wedge b$:	2-vecteur	$\longrightarrow$	droite
$a \wedge b \wedge c$:	3-vecteur	$\longrightarrow$	plan

Interprétation

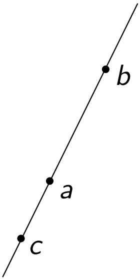
Représenter des variétés linéaires

Géométrie ➜ Espace «géométrique» (ensemble de points)

➥ Interprétation : multivecteurs ➜ objets géométriques

Soit l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

- Points de $\mathbb{P}^n$ ➜ vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$



Considérons l'algèbre $\bigwedge(\mathbb{R}^{n+1})$

Variétés linéaires

a, b, c :	1-vecteurs	$\longrightarrow$	points
$a \wedge b$:	2-vecteur	$\longrightarrow$	droite
$a \wedge b \wedge c$:	3-vecteur	$\longrightarrow$	plan

Incidences

$a \wedge b \wedge c = 0 \Leftrightarrow c$ est sur la droite ab