Deux problèmes issus de Delaunay

Yves Bertot

Caractériser les bonnes triangulations

- On ne concerne que les triangulations dont l'enveloppe convexe est un triangle
- Critère de planarité: $f + n - e = 2$
- Critère d'orientation: tous les triangles sont orientés, sauf 1

Lemme d'échange

- Remplacer deux triangles par deux autres
- Condition initiale
  - les deux triangles sont orientés
  - le cercle circonscrit à l'un des triangles contient le 4e point
- Problème: assurer que la troisième condition est satisfaite

Propriétés de l'orientation

- Axiomes de Knuth
- Parle de l'énumération des points d'un triangle
- L'ordre compte
- Si $\overline{abc}$ alors pas $\overline{acb}$
- 4 autres axiomes (à dessiner au tableau?)

Représentation algébrique de l'orientation

- $\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} > 0$
- Raisonnement sur l'orientation: `ring` et `psatz`
- Remplacer des propriétés d'ordre par des propriétés d'égalité!
- Axiom 5: égalité de Cramer

Appartenance au cercle circonscrit

- Probablement des axiomes comme pour l'orientation
- 2 utilisés
  - $a \in \bigcirc bcd \Rightarrow d \in \bigcirc abd$
  - $a \in \bigcirc bcd \Rightarrow d \notin \bigcirc abc$

représentation algébrique

- $$\begin{vmatrix} x_a & y_a & x_a^2 + y_a^2 & 1 \\ x_b & y_b & x_b^2 + y_b^2 & 1 \\ x_c & y_c & x_c^2 + x_c^2 & 1 \\ x & y & x^2 + y^2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$
- axiome conséquence de la propreté de forme multi-linéaire alternée

Lemme d'échange

- $\overline{abc} \wedge \overline{acd} \wedge d \in \bigcirc abc \Rightarrow \overline{abd} \wedge \overline{dcb}$

Technique de preuve

1. Faire apparaître l'axiome 5
2. utiliser $\overline{abc} \wedge \overline{acd} \Rightarrow \overline{abd}$
3. Problème pour faire apparaître le 5 point de l'axiome

Construction de la tangente

- le déterminant de cercle est une polynome du second degré, sans terme croisé, avec le même coefficient en x^2 et y^2
- équation de cercle, centre facile à déterminer
- point sur la tangente facile a construire $(x_a + (y_o - y_a), ya - (x_o - y_a))$

outils

- Tactique `ring` pour faire apparaitre les équations entre déterminants: immédiat pour la loi de Cramer en dimension fixée
- Tactiques `Psatz` très utile, mais il faut mâcher le travail
- Problème pour faire apparaître les témoins
  - utilisation de témoins 0,
  - remplissage avec les valeurs qui apparaissent
  - Pas aussi pratique que Maple ou Mathematica

Terminaison de l'algorithme

- Argument de terminaison: Toute relation irreflexive sans cycle sur un ensemble fini est bien fondée,
- L'ensemble des triangulations portées par un ensemble de point fini est fini
- Chaque flip fait décroître une certaine relation sur les vecteurs de nombres réels

Approche systèmatique des ensembles finis

- Directement inspiré de `ssreflect`,
- point de vue moins contraignant
  - ne pas imposer la décidabilité des prédicats
  - fournir seulement une liste couvrante

Un peu de Coq

```
Record fset (A:Type) :=
 mkfs {pred :> A -> Prop; fs_enum : list A;
       _ : forall x, pred x -> In x fs_enum}.

Lemma enum_p :
  forall A (fs : fset A) x, fs x -> In x (fs_enum
```

Une algèbre de la finitude

Quelques règles de conservation de la finitude

- Produit cartésien,
- Somme disjointe,
- Listes de longueur fixée,
- Listes de longueur bornée,
- Listes sans duplication,
- Image inverse d'injection.

Preuves par construction de la liste d'énumération

Schéma de récursion sur ensemble fini

- Plus besoin de montrer que la relation est bien fondée
- Seulement besoin de montrer que la clôture transitive est irreflexive
- Problème : extraction insatisfaisante
  - Construction explicite des listes énumérantes
  - Coût exponentiel dans le cas listes sans duplication
  - Fournir une extraction ad-hoc?
  - 4 semaines pour trouver une solution.