Algèbres de Grassmann-Cayley

Laurent Fuchs

XLIM-SIC
Université de Poitiers

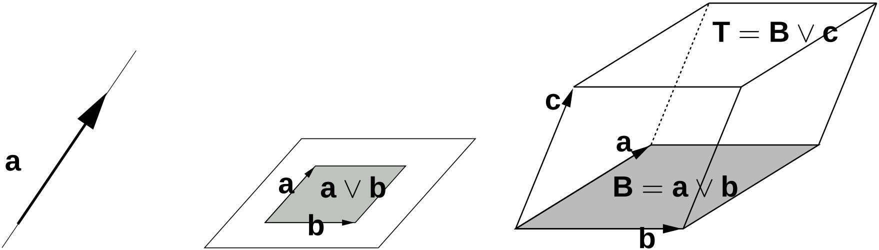
9-10 décembre 2009
INRIA Sophia-Antipolis

Rappels ; Algèbre de Grassmann (ou extérieure)

Le formalisme de l'algèbre de Grassmann

- Langage pour représenter et manipuler des sous-espaces (vectoriels)
- Sans faire référence à un système de coordonnées
- Généralisation des vecteurs ; notion de multi-vecteurs
- Exprimer la dépendance linéaire des vecteurs ($a \vee b = 0$)

Rappels ; Algèbre de Grassmann (ou extérieure)



(a) Vecteur (b) Bi-vecteur (c) Tri-vecteur

Base de $\mathcal{G}_3$: $(1, e_1, e_2, e_3, e_1 \vee e_2, e_1 \vee e_3, e_2 \vee e_3, e_1 \vee e_2 \vee e_3)$

Rappels ; Algèbre de Grassmann (ou extérieure)

Extenseurs

- $A = a_1 \vee \cdots \vee a_k = a_1 \cdots a_k$ avec a_i vecteurs.
- Extenseurs en bijection avec les k-sous-espaces vectoriels
- Pour $A = a_1 \cdots a_k$, les a_i base de $\overline{A}$
- Le sous-espace $\overline{A}$ est déterminé par A, $\{v \in V | A \vee v = 0\}$
- A est déterminé par $\overline{A}$ à un scalaire près.
- $B = b_1 \cdots b_j$, $A \vee B = a_1 \cdots a_k b_1 \cdots b_j$
- $A \vee B \neq 0$ si tous les a_i et b_l sont indépendants.

Lemme

Si $A \vee B \neq 0$, on a

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \vee B} = span\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_j\}$$

Un nouveau produit ; le meet

- Intersections de sous-espaces
- On identifie $\Lambda^d(V)$ avec les scalaires (d dimension de V)
- Extenseur de $\Lambda^d(V)$, déterminant des vecteurs, $[a_1, \ldots, a_k] := a_1 \cdots a_k$.

Définition

Soient $A = a_1 \cdots a_j$ et $B = b_1 \cdots b_k$ extenseurs avec $j + k \geq d$ alors leur *meet* ($\in \Lambda^{j+k-d}(V)$) est :

$$A \wedge B = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \left[a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(d-k)}, b_1, \ldots, b_k\right] .a_{\sigma(d-k+1)} \cdots a_{\sigma(j)}$$

Les permutations σ sont tq.
$\sigma(1) < \cdots < \sigma(d-k)$ et $\sigma(d-k+1) < \cdots < \sigma(j)$.
(*suffles* de $(d-k, j-(d-k))$)

Un nouveau produit ; le meet

Quelques propriétés

- $A \vee B = (-1)^{jk} B \vee A$ et $A \wedge B = (-1)^(d-k)(d-j) B \wedge A$.
- $\vee$ et $\wedge$ associatifs et distributifs sur l'addition et la multiplication par un scalaire.
- Le meet de deux extenseurs et un extenseur.
- On étend les définitions de $\vee$ et $\wedge$ à des éléments quelconque de $\Lambda(V)$ par distributivité.

Proposition

- $A \wedge B \neq 0$ *ssi.* $\overline{A} + \overline{B} = V$
- *Si* $\overline{A} + \overline{B} = V$ *alors* $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Un nouveau produit ; le meet

Interprétation avec un espace projectif

- Pour un espace projectif $\mathbb{P}^{(d-1)}$ on considère l'espace vectoriel V^d associé.
- À chaque n-sous-espace de V^d on associe une $(n-1)$-variété linéaire de $\mathbb{P}^{(d-1)}$ (vecteur - point, plan - droite, etc.)
- Copoint ; tout élément de grade $d-1$, extenseur de grade $d-1$.
- Le meet est dual du join, où la dualité échange points et copoints

Définition

L'algèbre de Grassmann-Cayley est défini par l'espace vectoriel $\Lambda(V)$ muni des produits $\vee$ (meet) et $\wedge$ (join).

Expressions géométriques

Condition	Dim	Expression
Point $\overline{a}$ sur droite $\overline{bc}$	2	$a \wedge bc = 0$
Droites $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ s'intersectent	3	$ab \wedge cd$
Droites $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ et $\overline{ef}$ sont concourantes	2	$ab \wedge cd \wedge ef$
Plans $\overline{abc}$, $\overline{def}$ et $\overline{ghi}$ s'intersectent en une droite	3	$abc \wedge def \wedge ghi = 0$
Le point $\overline{i}$ est sur la droite définie par les intersections de $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ et de $\overline{ef}$ et $\overline{gh}$	2	$(ab \wedge cd) \vee (ef \wedge gh) \vee i = 0$

Des théorèmes «classiques»

Théorème de Desargues

- Si deux triangles (a, b, c) et (a', b', c') sont perspectifs alors les trois intersections des paires d'arêtes sont alignés.
- Expression ; $(ab \wedge a'b') \vee (bc \wedge b'c') \vee (ac \wedge a'c') = 0$

Toute relation d'incidence en géométrie projective peut être traduite en une conjonction d'expressions simple de l'algèbre de Grassmann-Cayley.

Toute expression simple de l'algèbre de Grassmann-Cayley peut être traduite en géométrie projective.

Une autre approche

Utilisation de la dualité

- Pour tout choix d'une base de V, on a un isomorphisme δ entre $\Lambda(V)$ et $\Lambda(V^*)$
- Pour $u \in \Lambda(V)$, $\delta(u)$ est son dual, note u^*.

Définition

Soient A et B dans $\Lambda(V)$. L'opérateur *meet* est défini par :

$$A \wedge B = \delta^{-1}(\delta(T) \vee \delta(B))$$

On a $(A \wedge B)^* = A^* \vee B^*$

Lien avec précédemment

Pour $(a_1, \ldots, a_d)$ on a $(a_1 \vee \cdots \vee a_d)^* = det_{(e_i)}(a_1, \ldots, a_d)$ et $(a_1 \vee \cdots \vee a_d) = det_{(e_i)}(a_1, \ldots, a_d).e_1 \vee \cdots \vee e_n$

Objets géométriques

Objets géométriques de $\mathbb{P}^3$

- Points projectifs ; quadruplet de coordonnées
- Droites ; (Image d'un plan de $\mathbb{R}^4$)

$$D : \begin{pmatrix} 0 & n & m & f \\ -n & 0 & l & g \\ -m & -l & 0 & h \\ -f & -g & -h & 0 \end{pmatrix}$$

- Plan, élément de $\Lambda^3(\mathbb{R}^4)$ (tenseur d'ordre 3) ; on prend $P^* \in \mathbb{R}^4$

Objets géométriques

- Dual d'une droite

$$D^* : \begin{pmatrix} 0 & h & -g & l \\ -h & 0 & f & -m \\ g & -f & 0 & n \\ -l & m & -n & 0 \end{pmatrix}$$

- Plan défini par un point et une droite ; $(P \vee D)^*$

$$(-yh + zg - wl, xh - zf + wm, -xg + yf - wn, xl - ym + zn)$$

  c'est aussi $a^t.D^*$
- Intersection d'un plan et d'une droite $D \wedge P = D.P^*$
- Intersection de deux plans $(P \wedge Q)^* = P^* \vee Q^* = D$