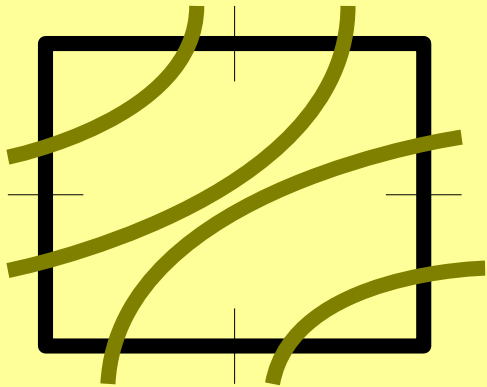


Calcul incrémental de l'homologie

→ Calcul de propriétés topologiques d'objets géométriques

Calcul incrémental de l'homologie

→ Calcul de propriétés topologiques d'objets géométriques
(ex. en dim. 2)



sphère

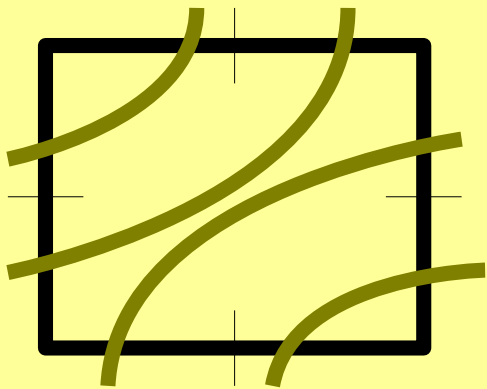
$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$

Calcul incrémental de l'homologie

→ Calcul de propriétés topologiques d'objets géométriques
(ex. en dim. 2)

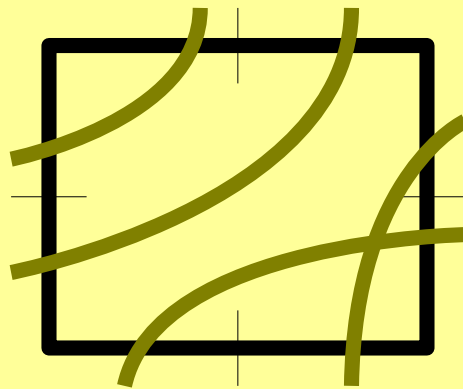


sphère

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$



plan projectif

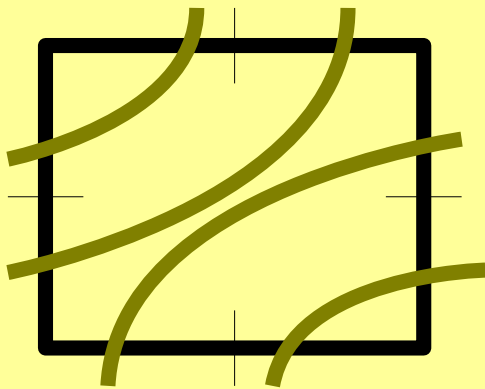
$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$H_2 = 0$$

Calcul incrémental de l'homologie

→ Calcul de propriétés topologiques d'objets géométriques
(ex. en dim. 2)

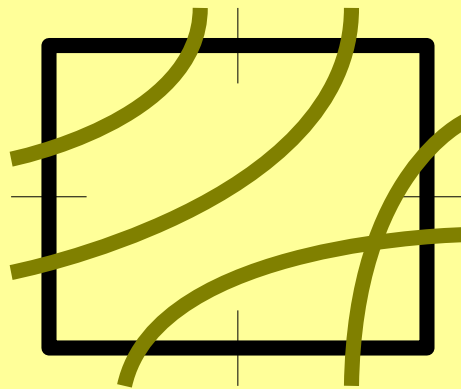


sphère

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$

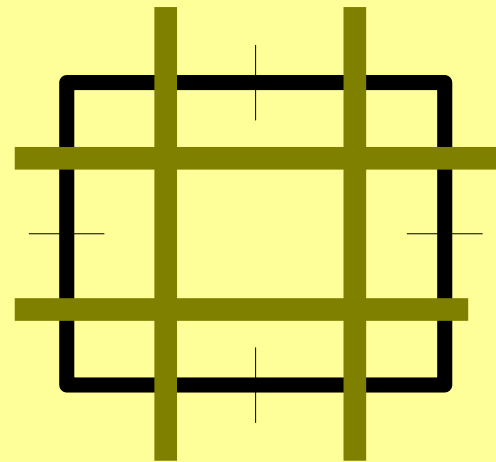


plan projectif

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$H_2 = 0$$



tore

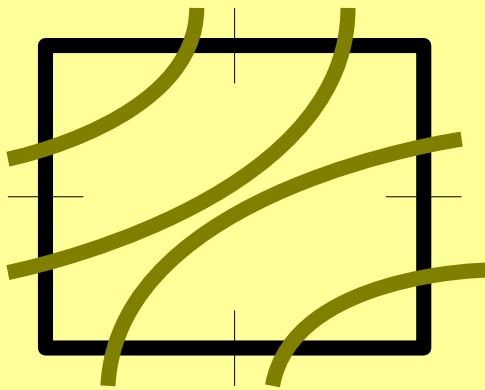
$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$

Calcul incrémental de l'homologie

→ Calcul de propriétés topologiques d'objets géométriques
(ex. en dim. 2)

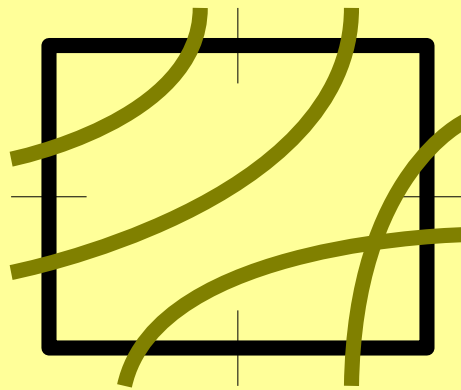


sphère

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$

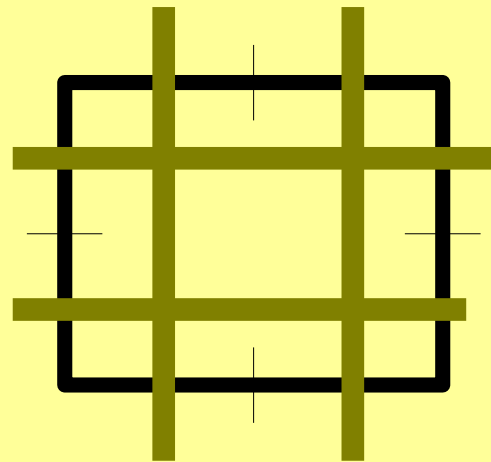


plan projectif

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$H_2 = 0$$

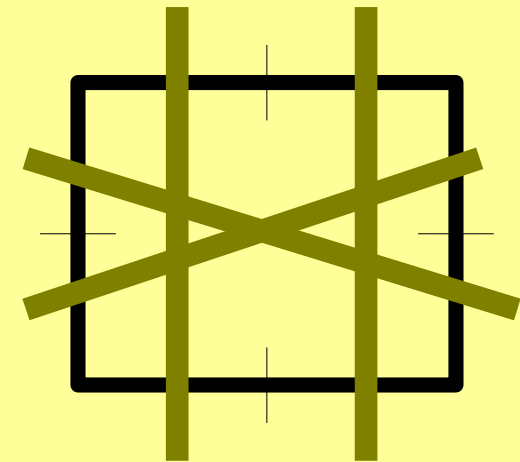


tore

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$



bouteille de Klein

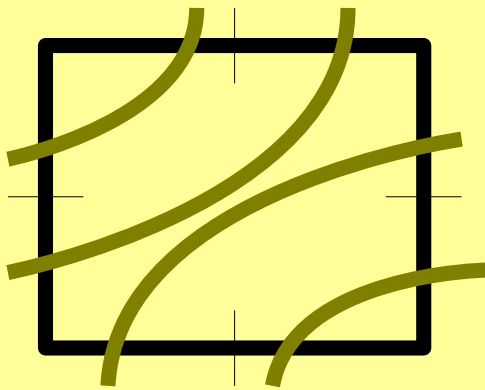
$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$H_2 = 0$$

Calcul incrémental de l'homologie

→ Calcul de propriétés topologiques d'objets géométriques
(ex. en dim. 2)

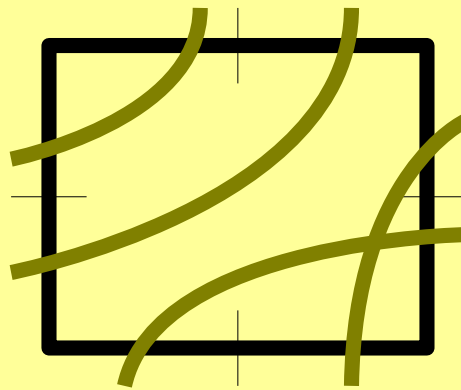


sphère

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$

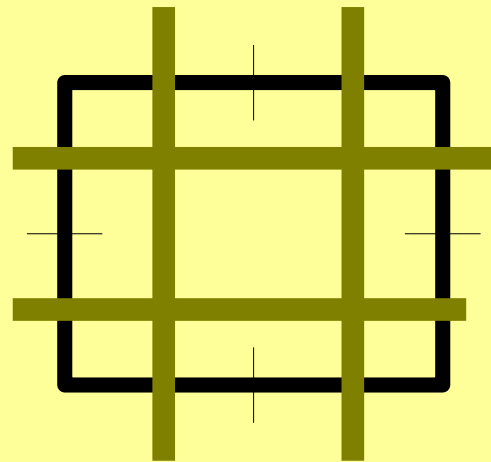


plan projectif

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$H_2 = 0$$

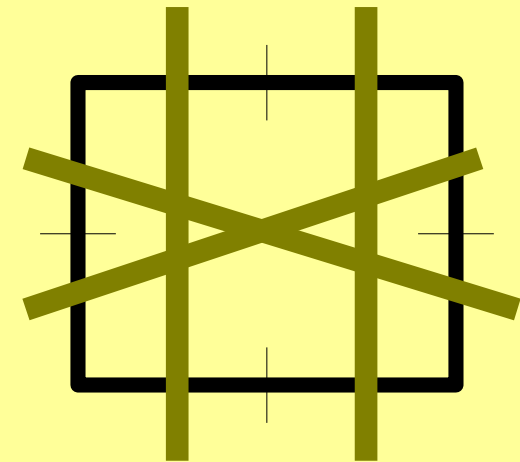


tore

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$$

$$H_2 = \mathbb{Z}$$



bouteille de Klein

$$H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$H_2 = 0$$

→ rapport avec Galapagos : cf. après

Notions générales

→ Ensembles semi-simpliciaux

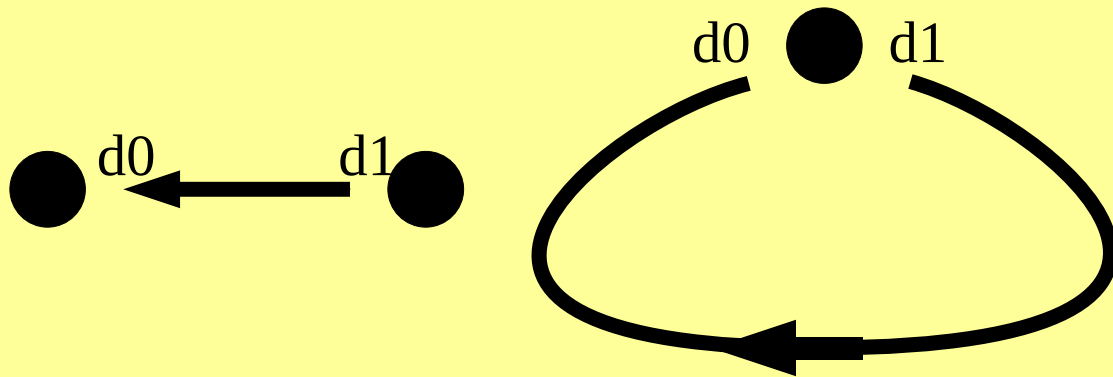
Notions générales

→ Ensembles semi-simpliciaux



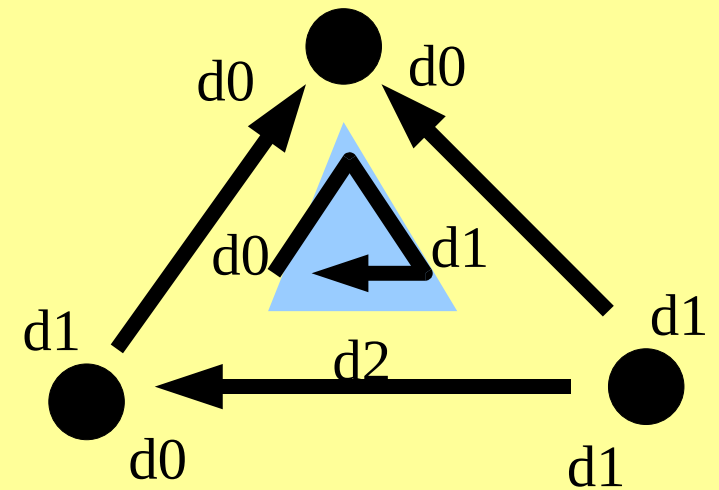
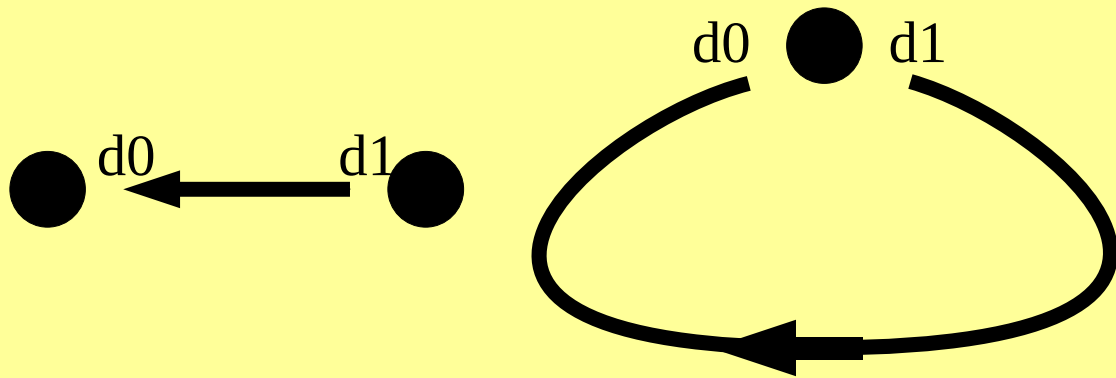
Notions générales

→ Ensembles semi-simpliciaux



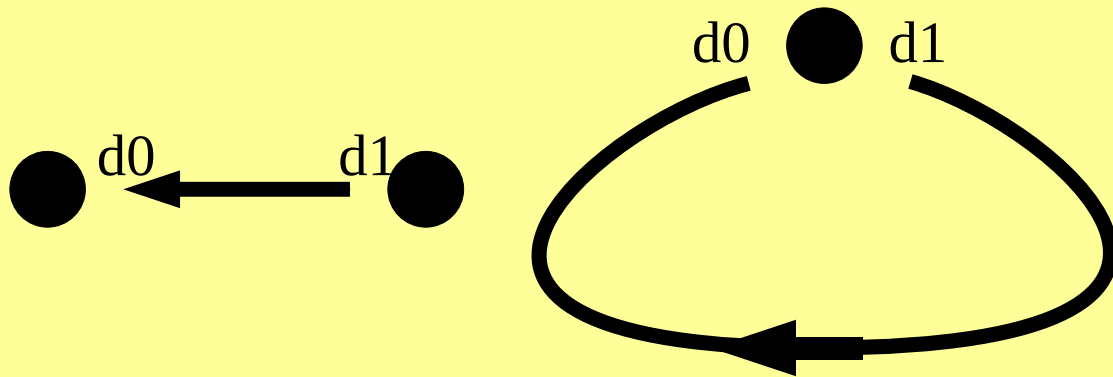
Notions générales

→ Ensembles semi-simpliciaux



Notions générales

→ Ensembles semi-simpliciaux

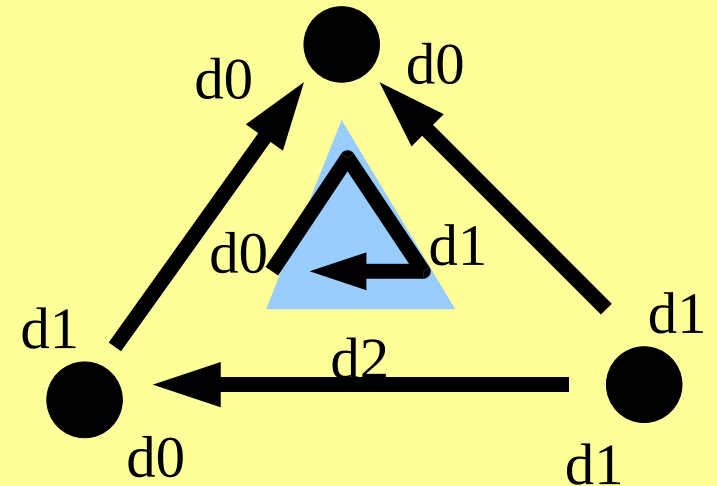


$$S = (\cup K_i, (d_j))$$

$$K_i = \{i\text{-simplexes}\}$$

$$(d_j)_{0 \leq j \leq i} : K_i \rightarrow K_{i-1} \quad (\text{opérateurs de face})$$

$$\text{vérifiant : } d_j d_i = d_j d_{i-1} \text{ pour } i > j$$



Notions générales

→ **Complexe de chaînes**

Notions générales

→ **Complexe de chaînes**

- **n-chaîne** = $\sum a_i x_i^n$ avec x_i^n élément de K_n
et a_i élément de $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \dots$

Notions générales

→ **Complexe de chaînes**

- **n-chaîne** = $\sum a_i x_i^n$ avec x_i^n élément de K_n
et a_i élément de $Z, Z/2Z, Q, \dots$
- **opérateur de bord ∂** :
$$x\partial = \sum (-1)^i x d_i$$

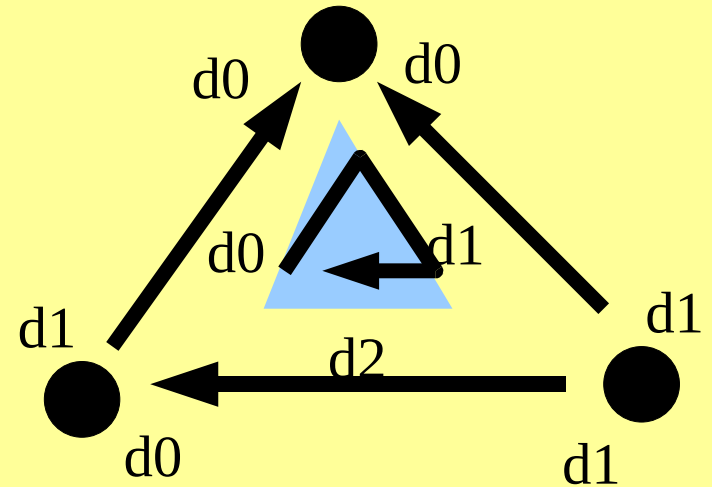
Notions générales

→ **Complexe de chaînes**

- **n-chaîne** = $\sum a_i x_i^n$ avec x_i^n élément de K_n
et a_i élément de $Z, Z/2Z, Q, \dots$

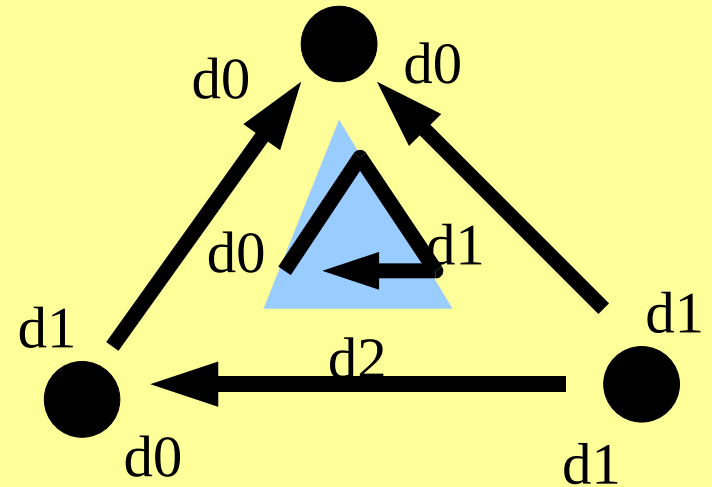
- **opérateur de bord ∂** :

$$x\partial = \sum (-1)^i x d_i$$



Notions générales

→ **Complexe de chaînes**



- **n-chaîne** = $\sum a_i x_i^n$ avec x_i^n élément de K_n
et a_i élément de $Z, Z/2Z, Q, \dots$

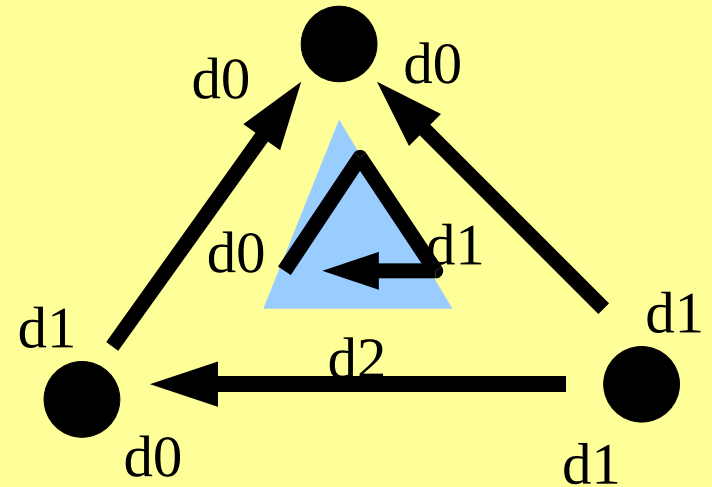
- **opérateur de bord ∂** :

$$x\partial = \sum (-1)^i x d_i$$

s'étend par linéarité sur les chaînes

Notions générales

→ **Complexe de chaînes**



- **n-chaîne** = $\sum a_i x_i^n$ avec x_i^n élément de K_n
et a_i élément de $Z, Z/2Z, Q, \dots$

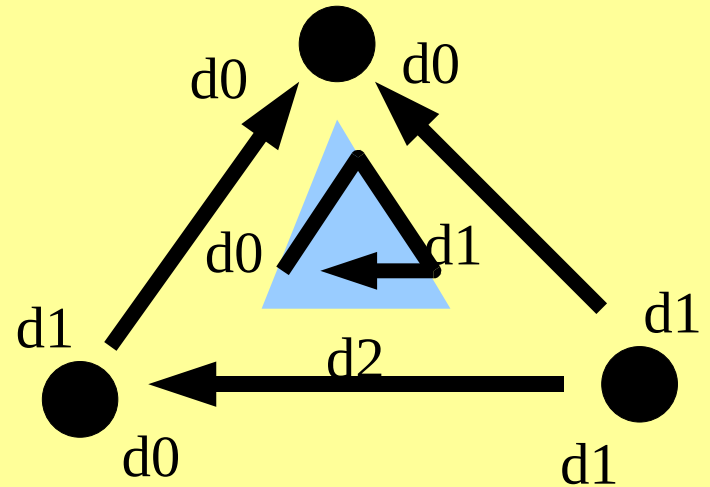
- **opérateur de bord ∂** :

$$x\partial = \sum (-1)^i x d_i$$

s'étend par linéarité sur les chaînes
vérifie $c\partial\partial = 0$ pour toute chaîne c

Notions générales

→ **Complexe de chaînes**



- **n-chaîne** = $\sum a_i x_i^n$ avec x_i^n élément de K_n
et a_i élément de $Z, Z/2Z, Q, \dots$

- **opérateur de bord ∂** :

$$x\partial = \sum (-1)^i x d_i$$

s'étend par linéarité sur les chaînes
vérifie $c\partial\partial = 0$ pour toute chaîne c

- **complexe de chaînes**

$$\partial \quad \partial \quad \partial \quad \partial \quad \partial \quad \partial$$

$$\dots \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

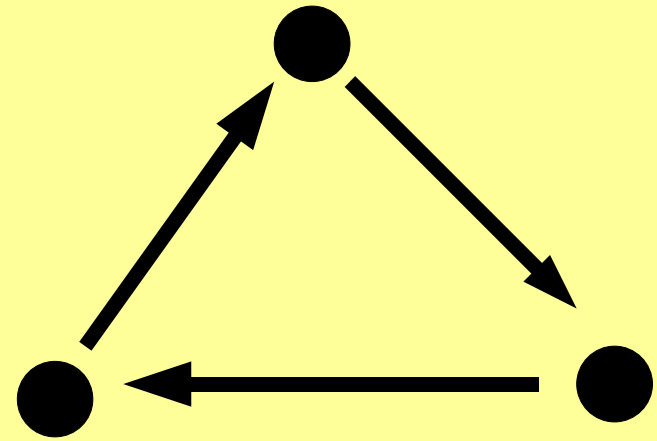
Notions générales

→ **Homologie**

Notions générales

→ Homologie

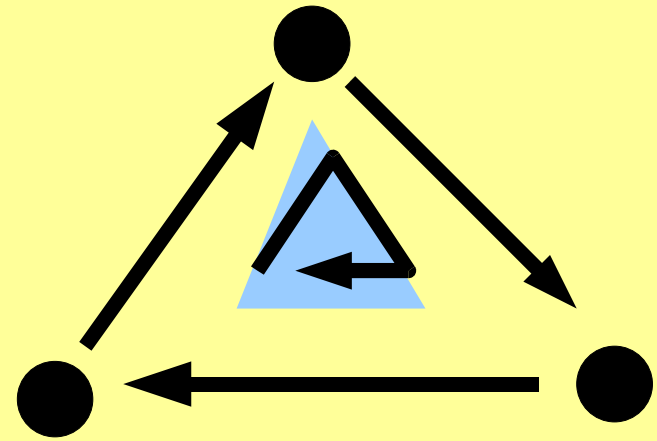
- Z_n : cycle $c / c\partial = 0$



Notions générales

→ Homologie

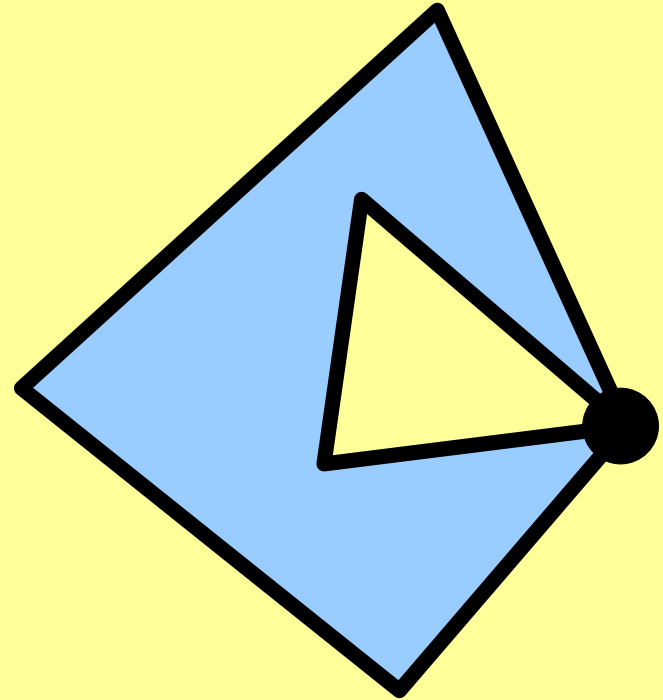
- Z_n : **cycle** c / $c\partial = 0$
- B_n : **bord** c tel qu'il existe c' avec $c'\partial = c$



Notions générales

→ Homologie

- Z_n : **cycle** c / $c\partial = 0$
- B_n : **bord** c tel qu'il existe c' avec $c'\partial = c$
- **groupe d'homologie** $H_n = Z_n / B_n$
deux cycles sont homologues s'ils diffèrent d'un bord



Notions générales

→ **Homologie**

- Z_n : **cycle** c / $c\partial = 0$
- B_n : **bord** c tel qu'il existe c' avec $c'\partial = c$
- **groupe d'homologie** $H_n = Z_n / B_n$
deux cycles sont homologues s'ils diffèrent d'un bord

• **théorème :**

$$H_n = \underbrace{Z + \dots + Z}_{\text{nombre de Betti}} + \underbrace{Z / t_1 Z + \dots + Z / t_k Z}_{\text{partie de torsion}}$$

(NB : t_i divise t_{i+1})

Notions générales

→ Méthodes de calcul

Notions générales

→ **Méthodes de calcul**

- mise en forme de Smith

Notions générales

→ **Méthodes de calcul**

- mise en forme de Smith
- mise en forme de Smith-Agoston
 - calcul des générateurs

Notions générales

→ Méthodes de calcul

- mise en forme de Smith
- mise en forme de Smith-Agoston
→ calcul des générateurs
- calcul avec différentes classes de coefficients (\mathbb{Z} , $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$, \mathbb{Q} , ...)

Notions générales

→ Méthodes de calcul

- mise en forme de Smith
- mise en forme de Smith-Agoston
→ calcul des générateurs
- calcul avec différentes classes de coefficients (\mathbb{Z} , $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$, \mathbb{Q} , ...)
- calcul de compositions de réductions élémentaires

Notions générales

→ Méthodes de calcul

- mise en forme de Smith
 - mise en forme de Smith-Agoston
→ calcul des générateurs
 - calcul avec différentes classes de coefficients (\mathbb{Z} , $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$, \mathbb{Q} , ...)
 - calcul de compositions de réductions élémentaires
- => dans tous les cas, calcul sur l'objet (statique)**

Notions générales

→ Méthodes de calcul

- mise en forme de Smith
 - mise en forme de Smith-Agoston
→ calcul des générateurs
 - calcul avec différentes classes de coefficients (\mathbb{Z} , $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$, \mathbb{Q} , ...)
 - calcul de compositions de réductions élémentaires
- => dans tous les cas, calcul sur l'objet (statique)

- problème = complexité

Objectif

→ Calcul incrémental

Objectif

→ **Calcul incrémental**

- construction de l'objet par application d'opérations de base

Objectif

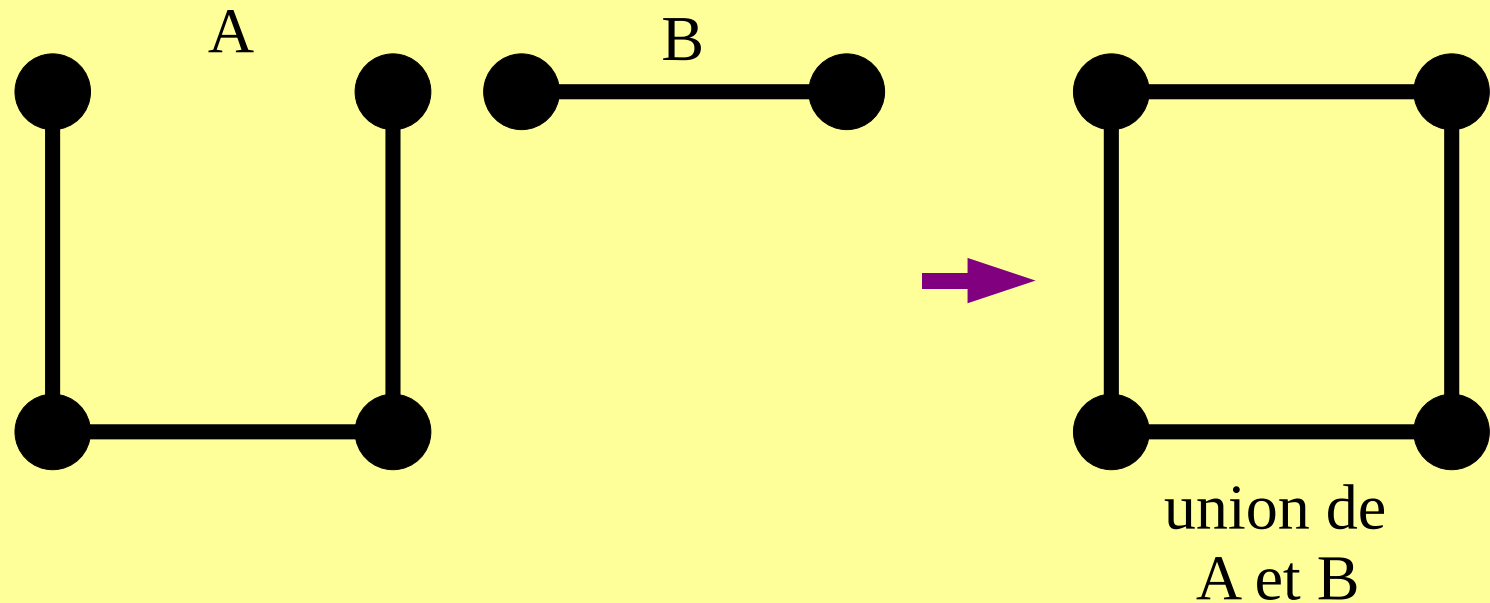
→ **Calcul incrémental**

- construction de l'objet par application d'opérations de base
- connaissant l'homologie avant, on en déduit l'homologie après

Objectif

→ Calcul incrémental

- construction de l'objet par application d'opérations de base
- connaissant l'homologie avant, on en déduit l'homologie après

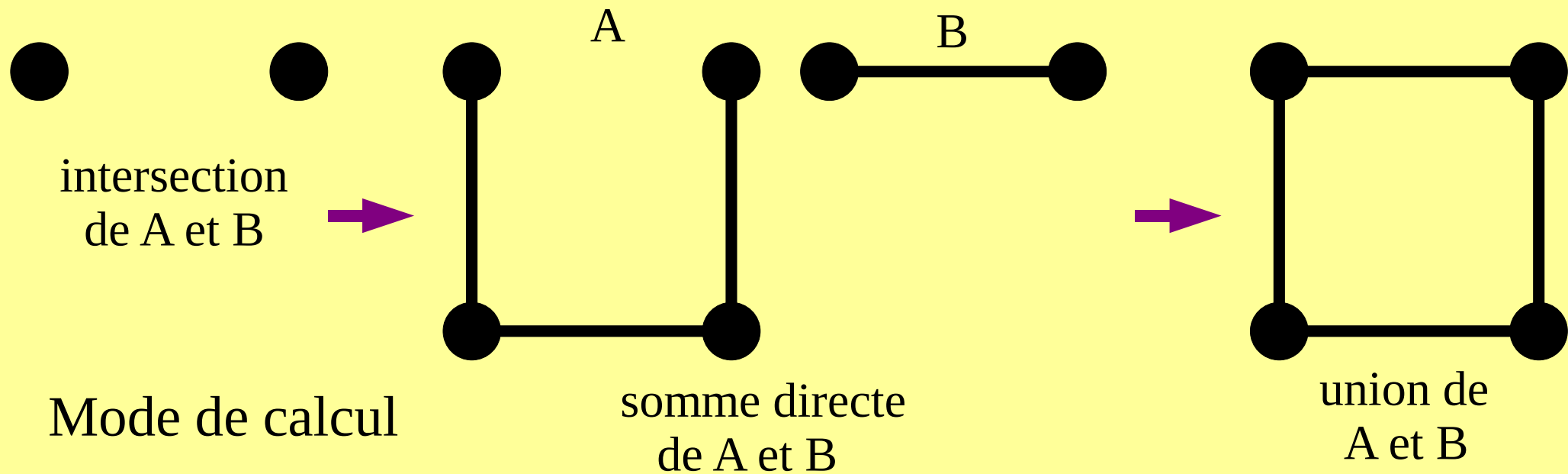


Opération

Objectif

→ Calcul incrémental

- construction de l'objet par application d'opérations de base
- connaissant l'homologie avant, on en déduit l'homologie après



Objectif

→ **Calcul incrémental**

- construction de l'objet par application d'opérations de base
- connaissant l'homologie avant, on en déduit l'homologie après
- intéressant si gain en complexité (ne pas **TOUT** recalculer)

Objectif

→ Calcul incrémental

- construction de l'objet par application d'opérations de base
- connaissant l'homologie avant, on en déduit l'homologie après
- intéressant si gain en complexité (ne pas **TOUT** recalculer)
- rapport avec Galapagos :
idée initiale = preuve des résultats

Objectif

→ Calcul incrémental

- construction de l'objet par application d'opérations de base
- connaissant l'homologie avant, on en déduit l'homologie après
- intéressant si gain en complexité (ne pas **TOUT** recalculer)
- rapport avec Galapagos :
 - idée initiale = preuve des résultats
 - n'apparaît pas dans le projet définitif

Objectif

→ **Calcul incrémental**

- construction de l'objet par application d'opérations de base
- connaissant l'homologie avant, on en déduit l'homologie après
- intéressant si gain en complexité (ne pas **TOUT** recalculer)
- rapport avec Galapagos :
 - idée initiale = preuve des résultats
 - n'apparaît pas dans le projet définitif
 - reste intéressant scientifiquement (???)

Approche suivie

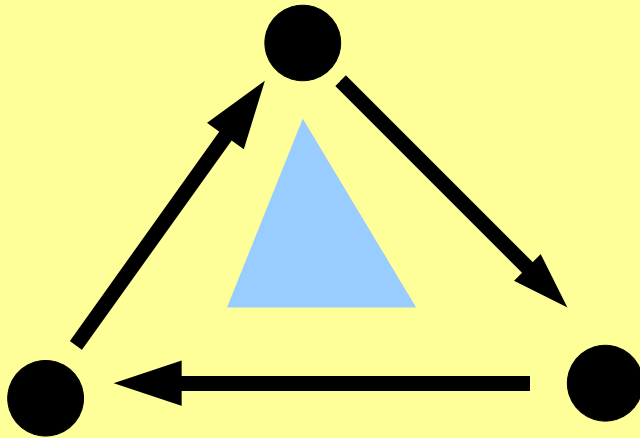
→ basée sur l'homologie effective

1er outil

→ notion de réduction

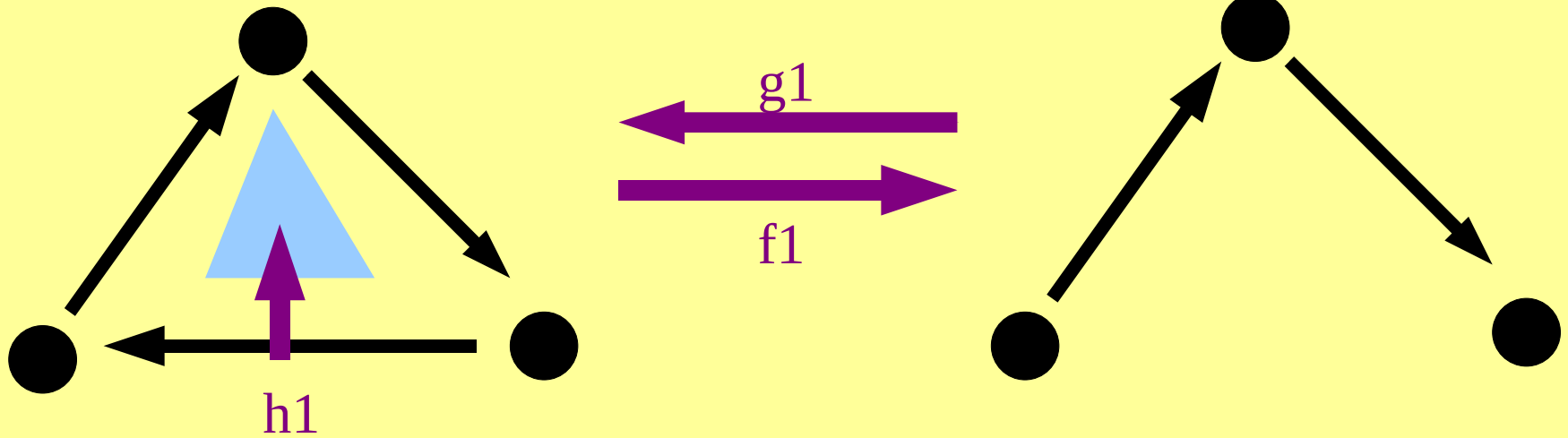
1er outil

→ notion de réduction



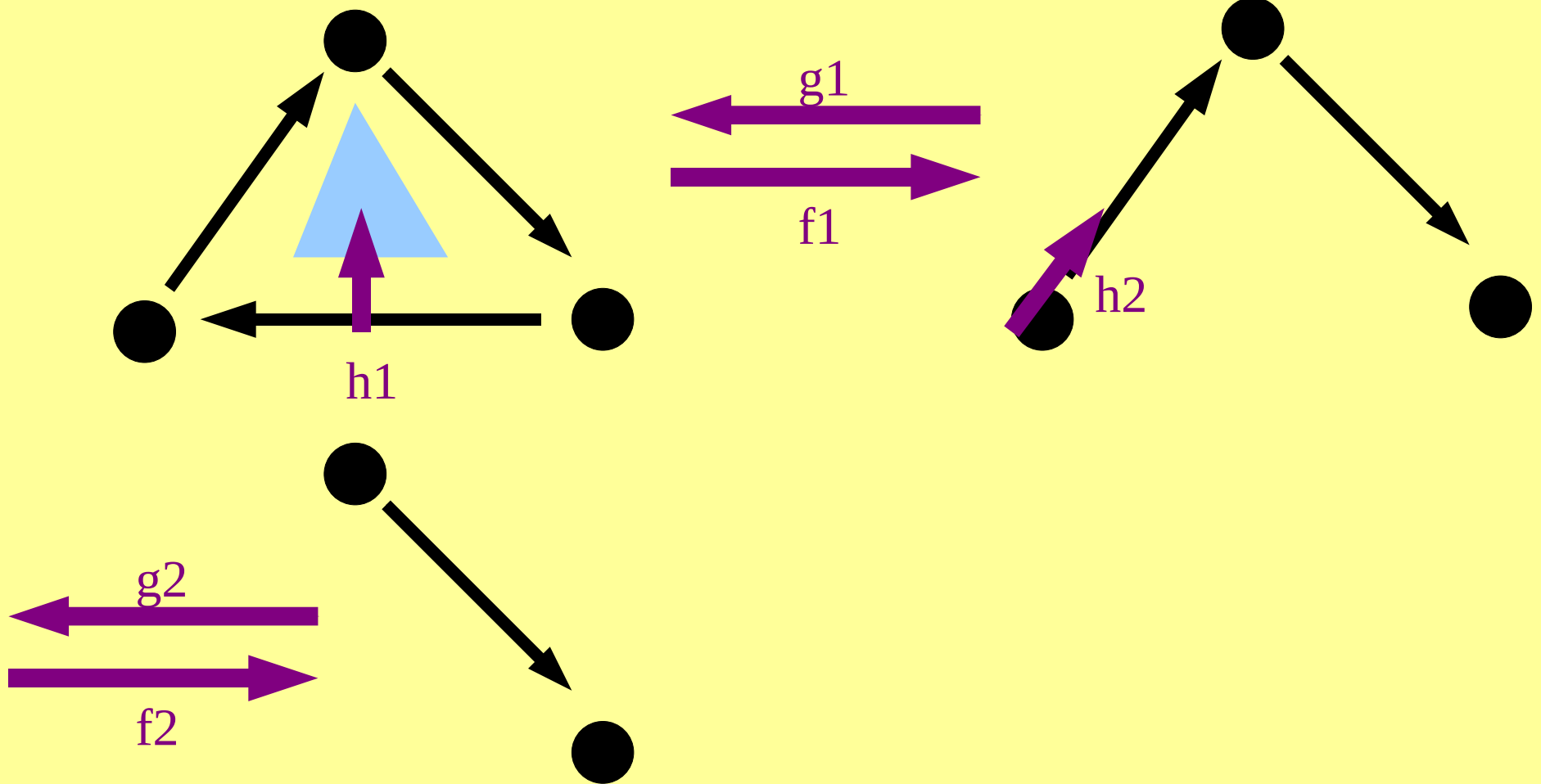
1er outil

→ notion de réduction



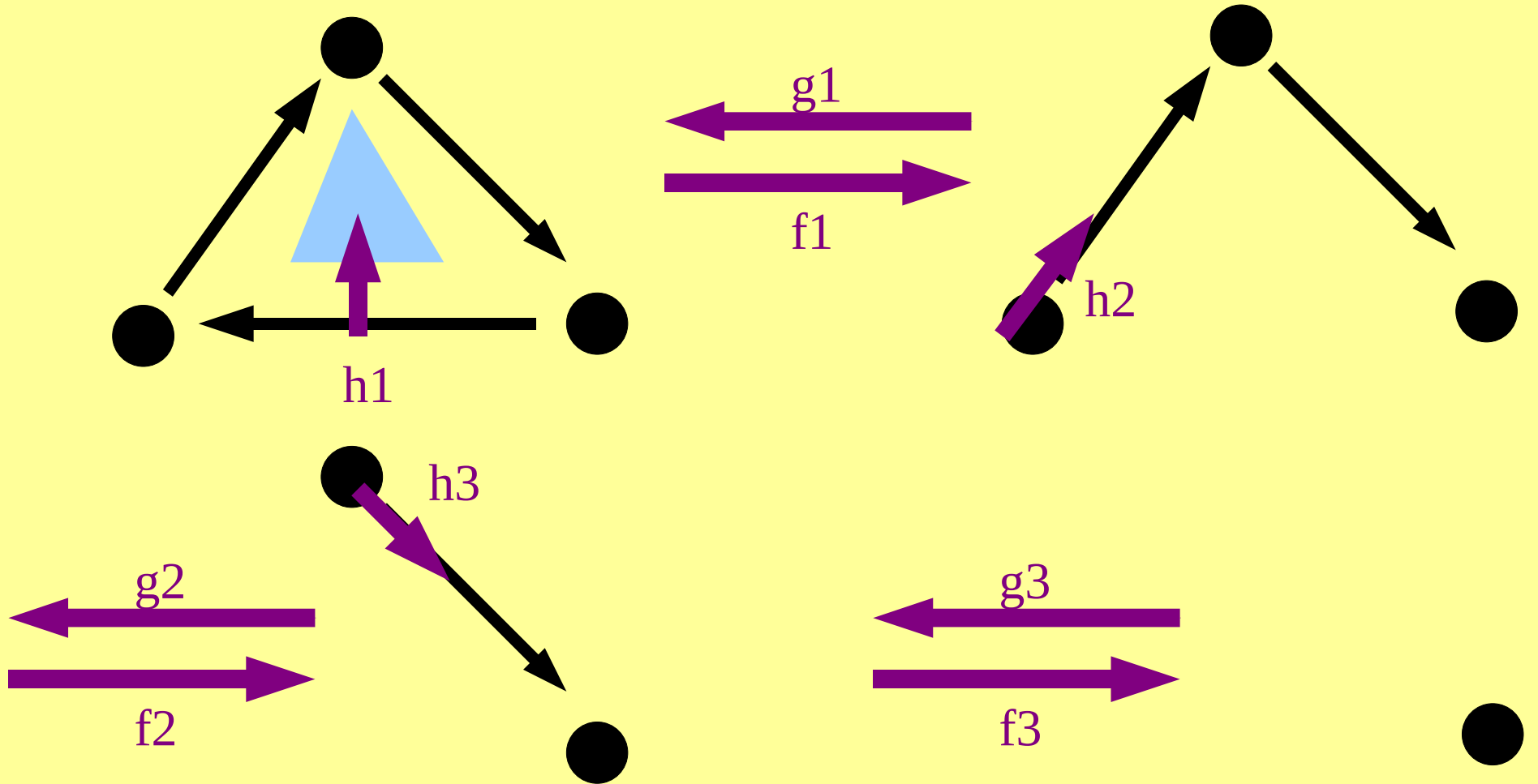
1er outil

→ notion de réduction



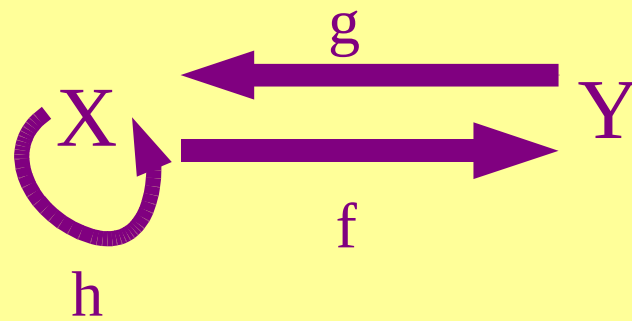
1er outil

→ notion de réduction



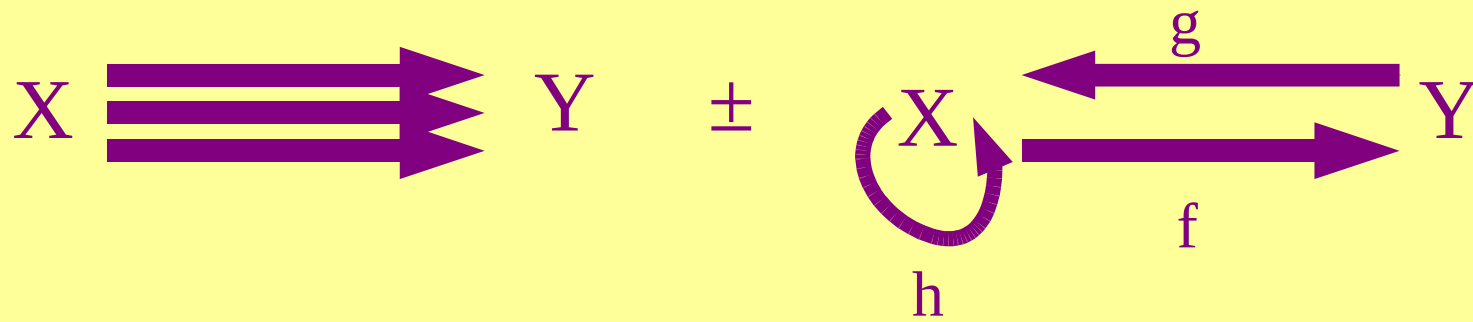
1er outil

→ notion de réduction



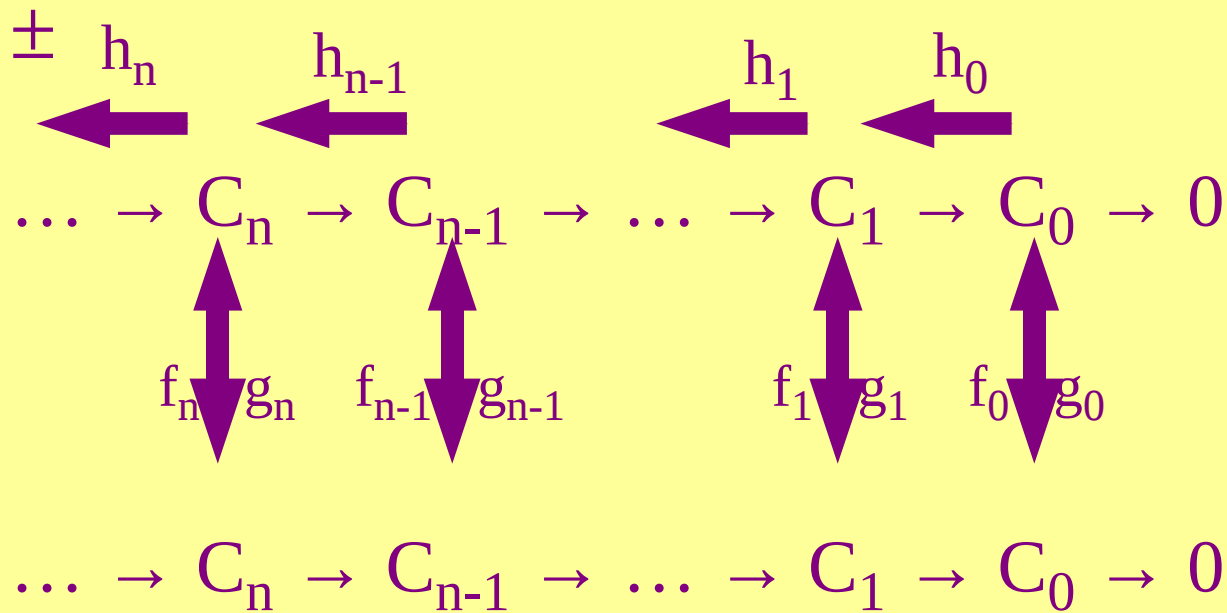
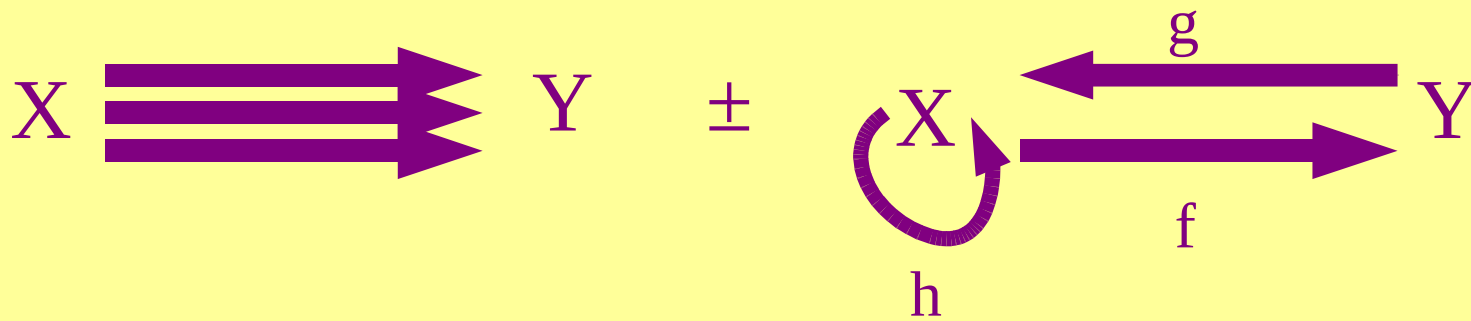
1er outil

→ notion de réduction



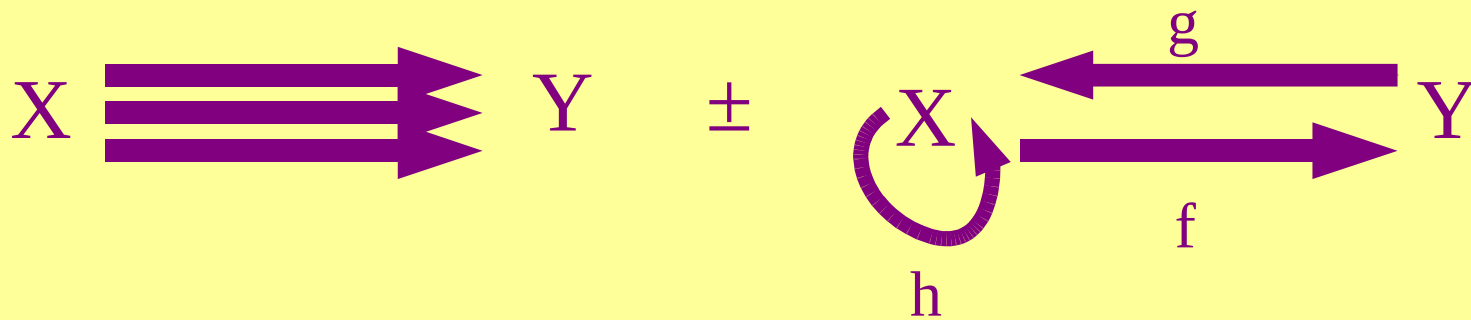
1er outil

→ notion de réduction



1er outil

→ notion de réduction



- $gf = \text{id}_Y$
- $\text{id}_X - fg = h\partial_X + \partial_X h$
- $hf = gh = hh = 0$

2ème outil

→ équivalence homologique



2ème outil

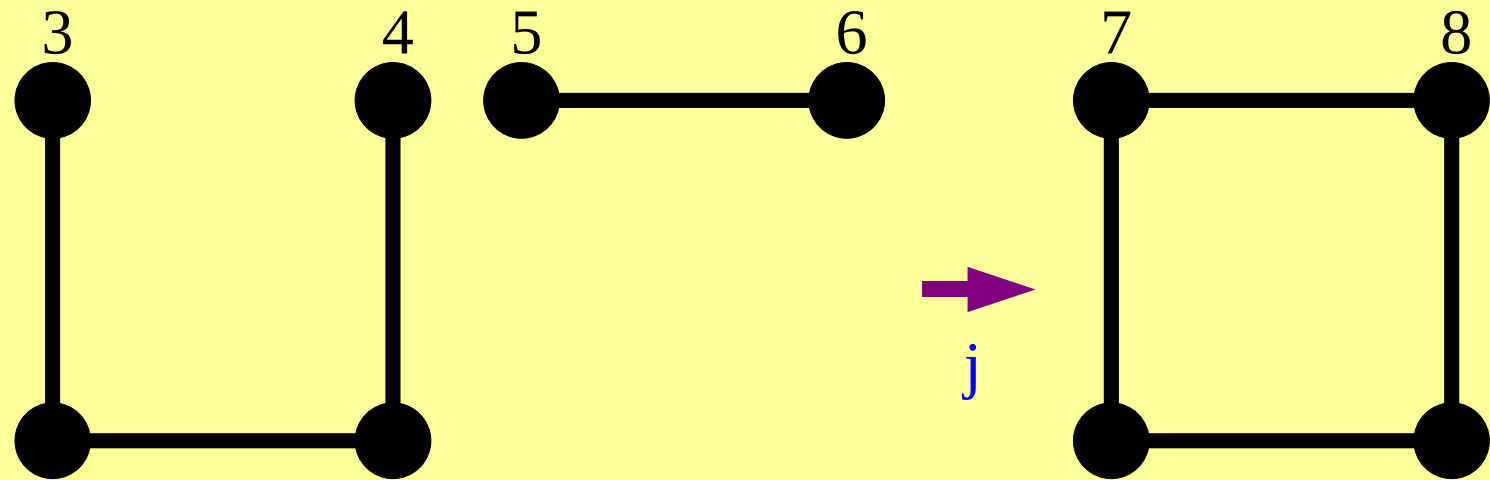
→ équivalence homologique

objet \leftarrow Gros \rightarrow Très petit

→ idem $\frac{21}{15}$ \leftarrow $\frac{42}{30}$ \rightarrow $\frac{14}{10}$

Approche suivie

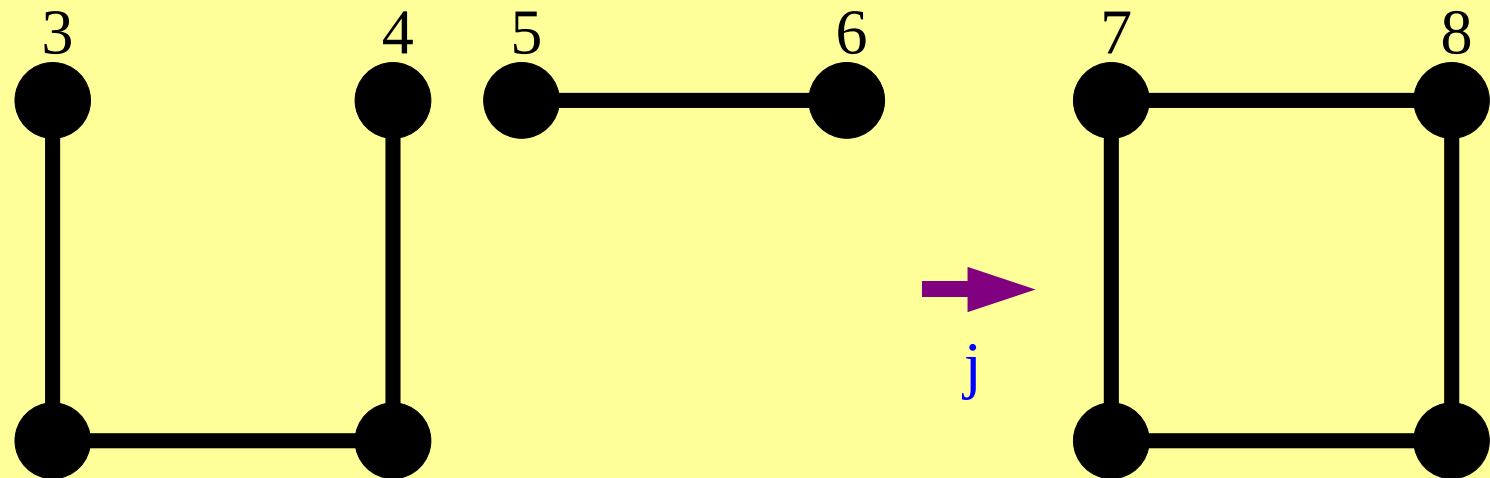
→ basée sur l'homologie effective



opération

Approche suivie

→ basée sur l'homologie effective

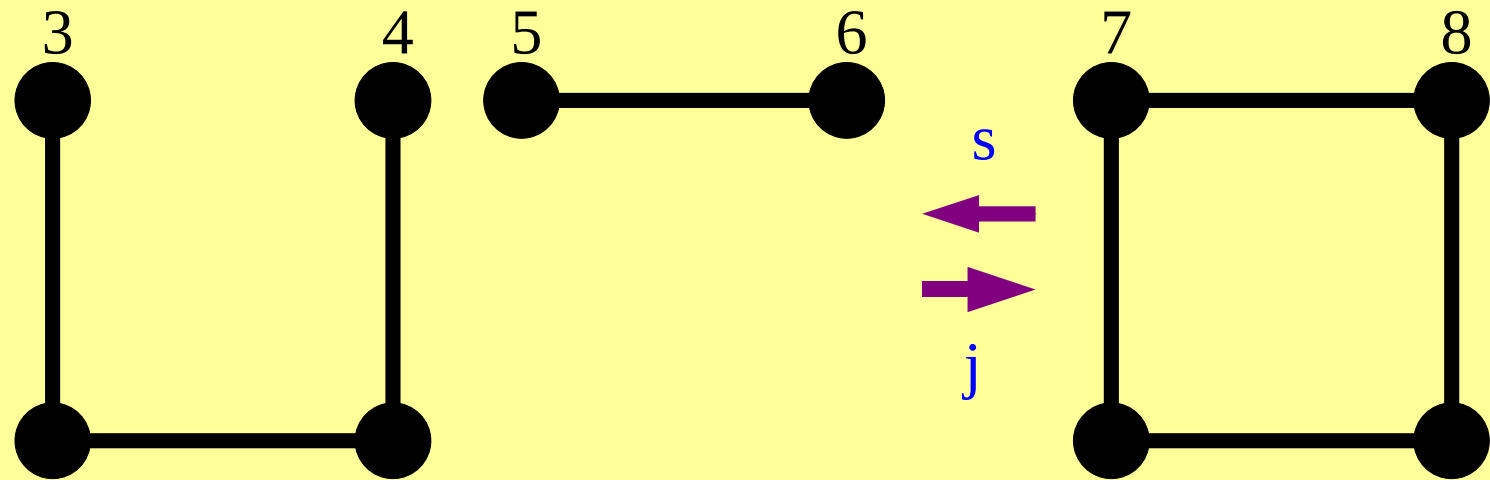


opération

$j =$ morphisme surjectif
(en particulier $3,5 \rightarrow 7$; $4,6 \rightarrow 8$)

Approche suivie

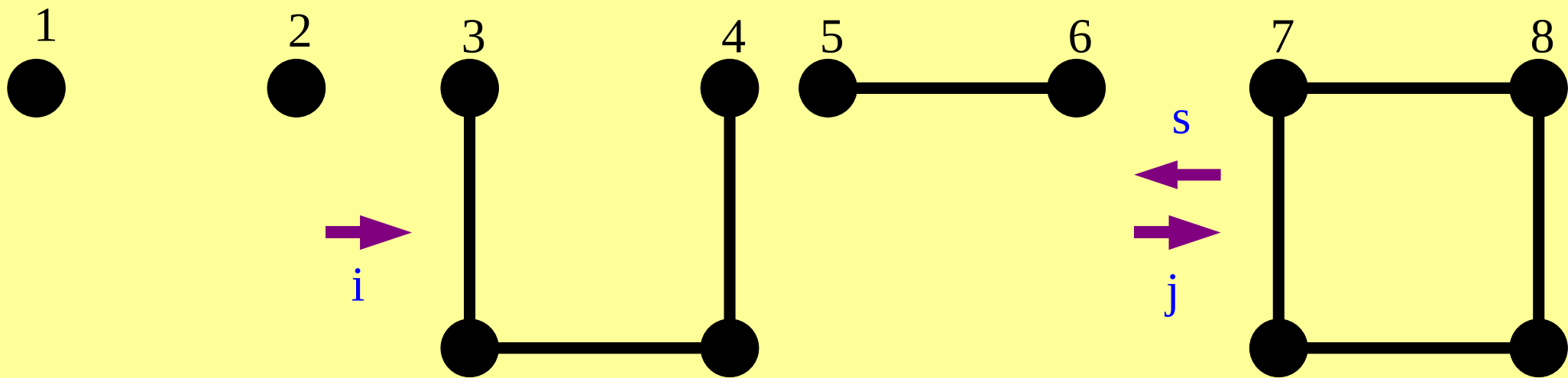
→ basée sur l'homologie effective



s : **UN** antécédent évident
(en particulier $7 \rightarrow 3$; $8 \rightarrow 4$)

Approche suivie

→ basée sur l'homologie effective

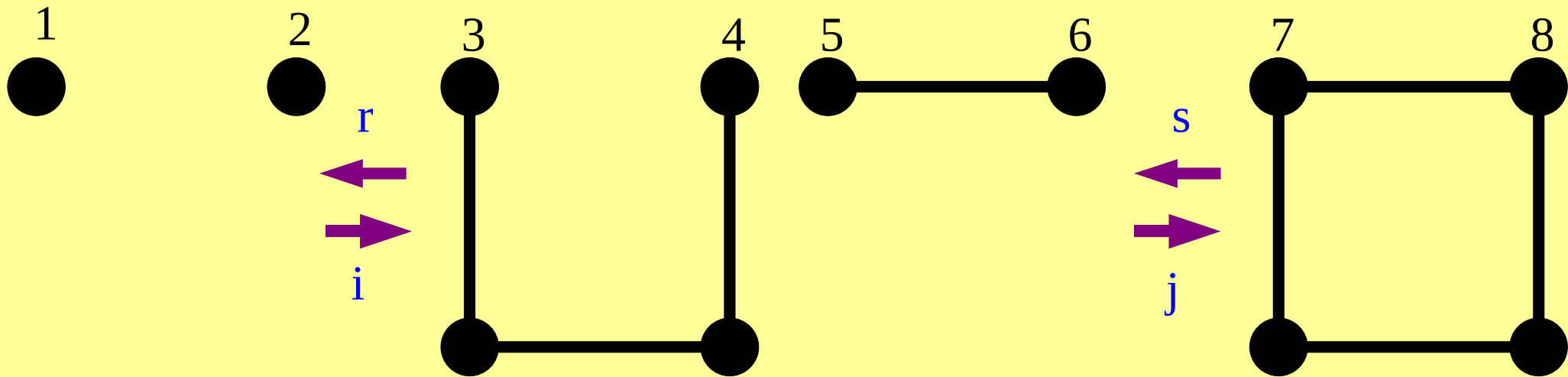


i : morphisme injectif

$1 \rightarrow 3-5, 2 \rightarrow 4-6$

Approche suivie

→ basée sur l'homologie effective

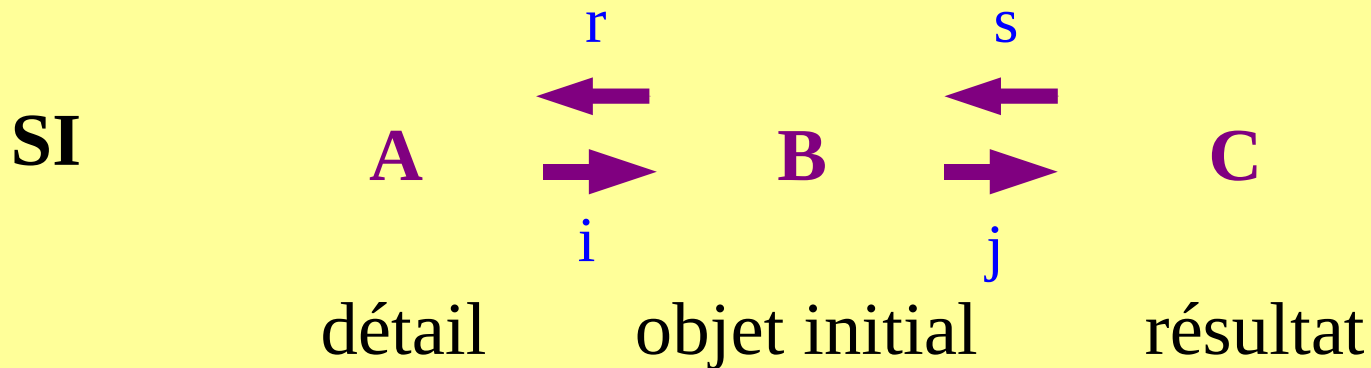


r : en particulier,

$$3, 4 \rightarrow 0, 5 \rightarrow -1, 6 \rightarrow -2$$

Approche suivie

→ basée sur l'homologie effective



avec :

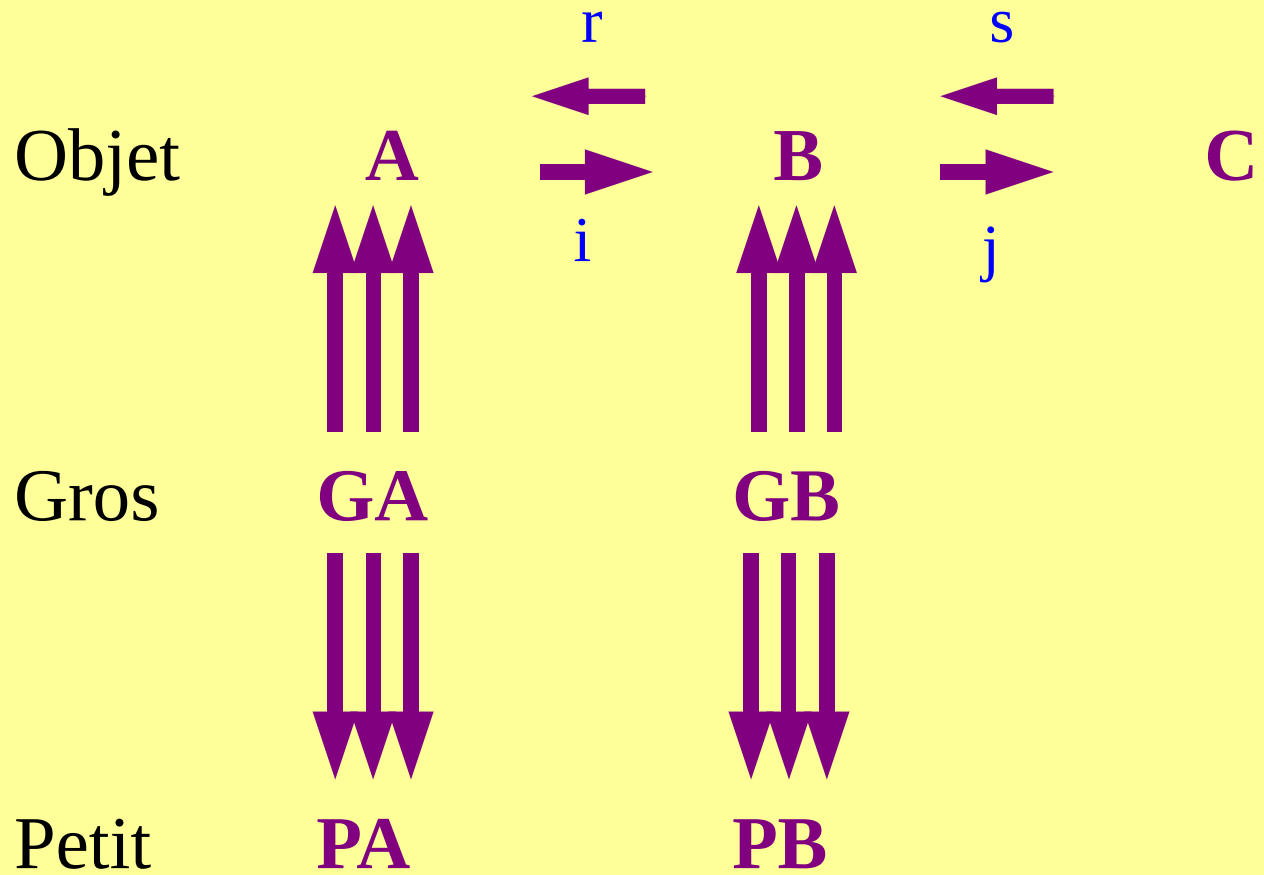
i, j morphismes de chaînes ; r, s respectent la dimension

et

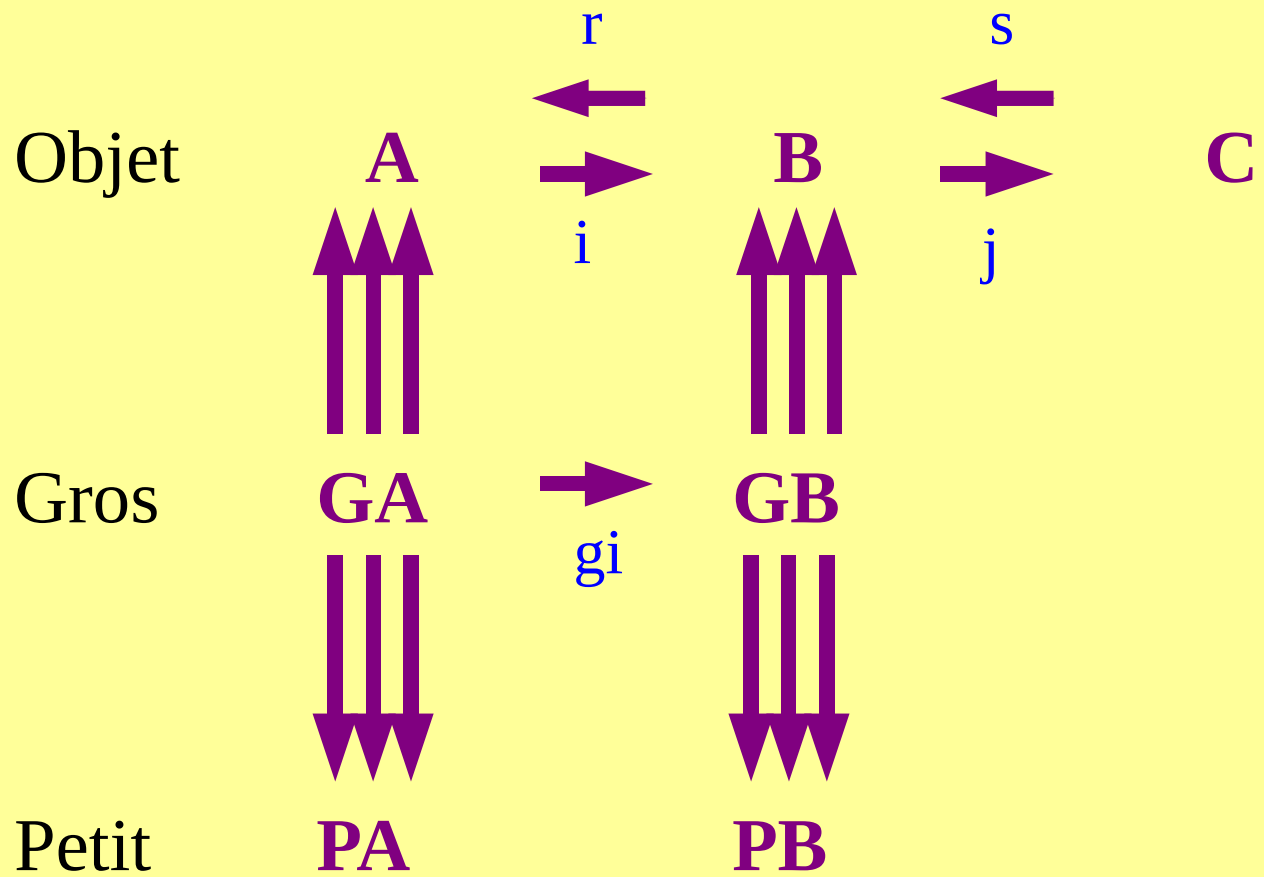
$$ir = \text{id}_A ; sj = \text{id}_C ; ri + js = \text{id}_B$$

alors OUI, on peut calculer ...

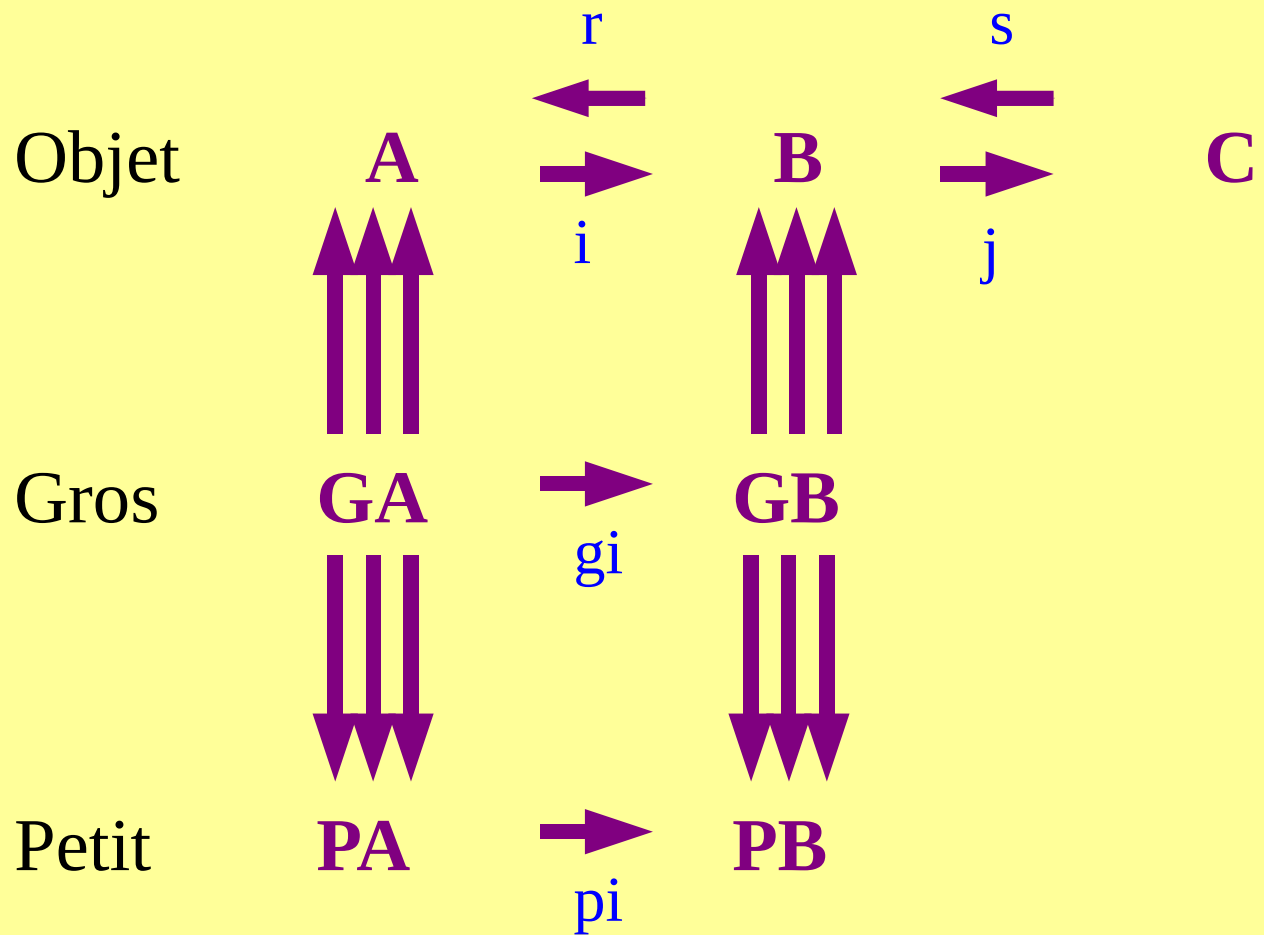
Calcul



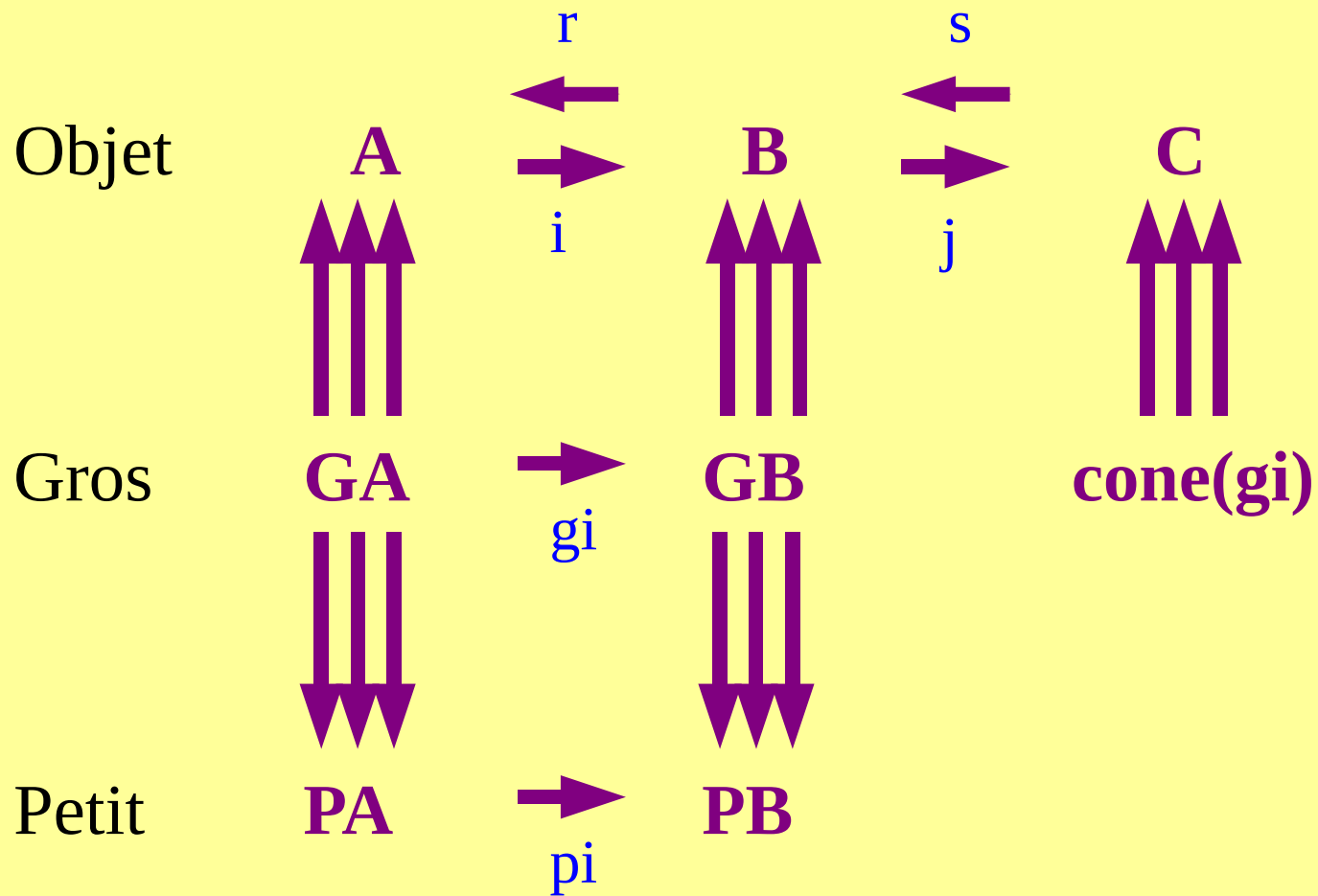
Calcul



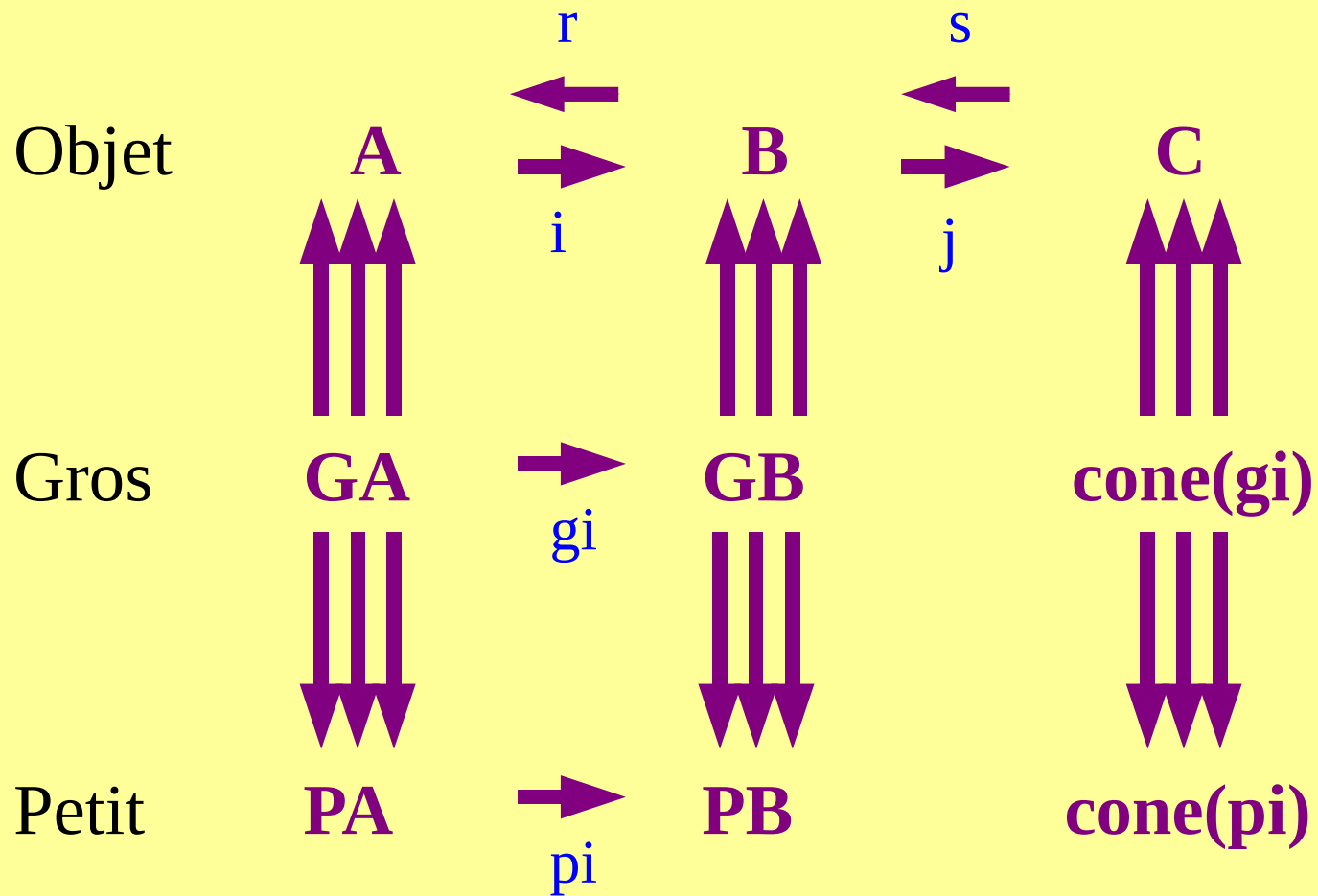
Calcul



Calcul

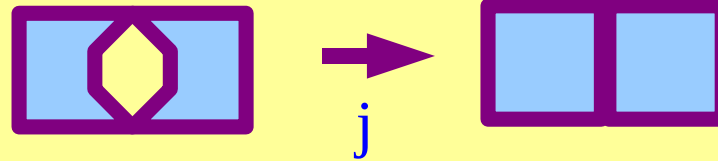


Calcul

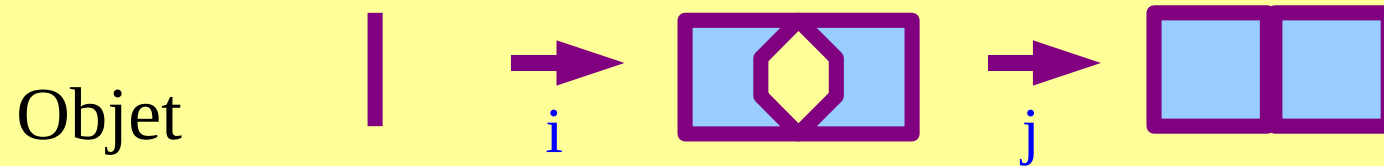


Exemple (identification)

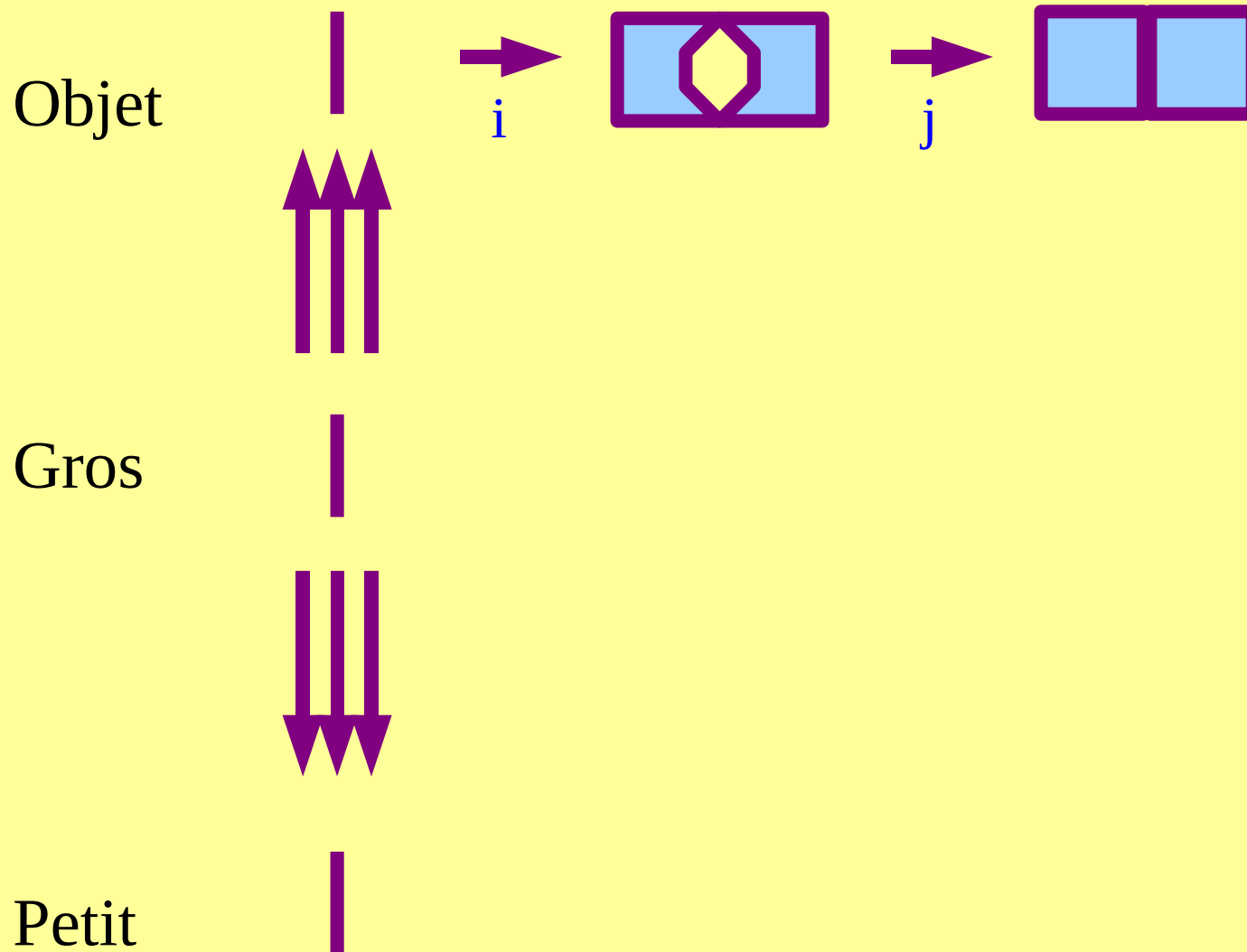
Objet



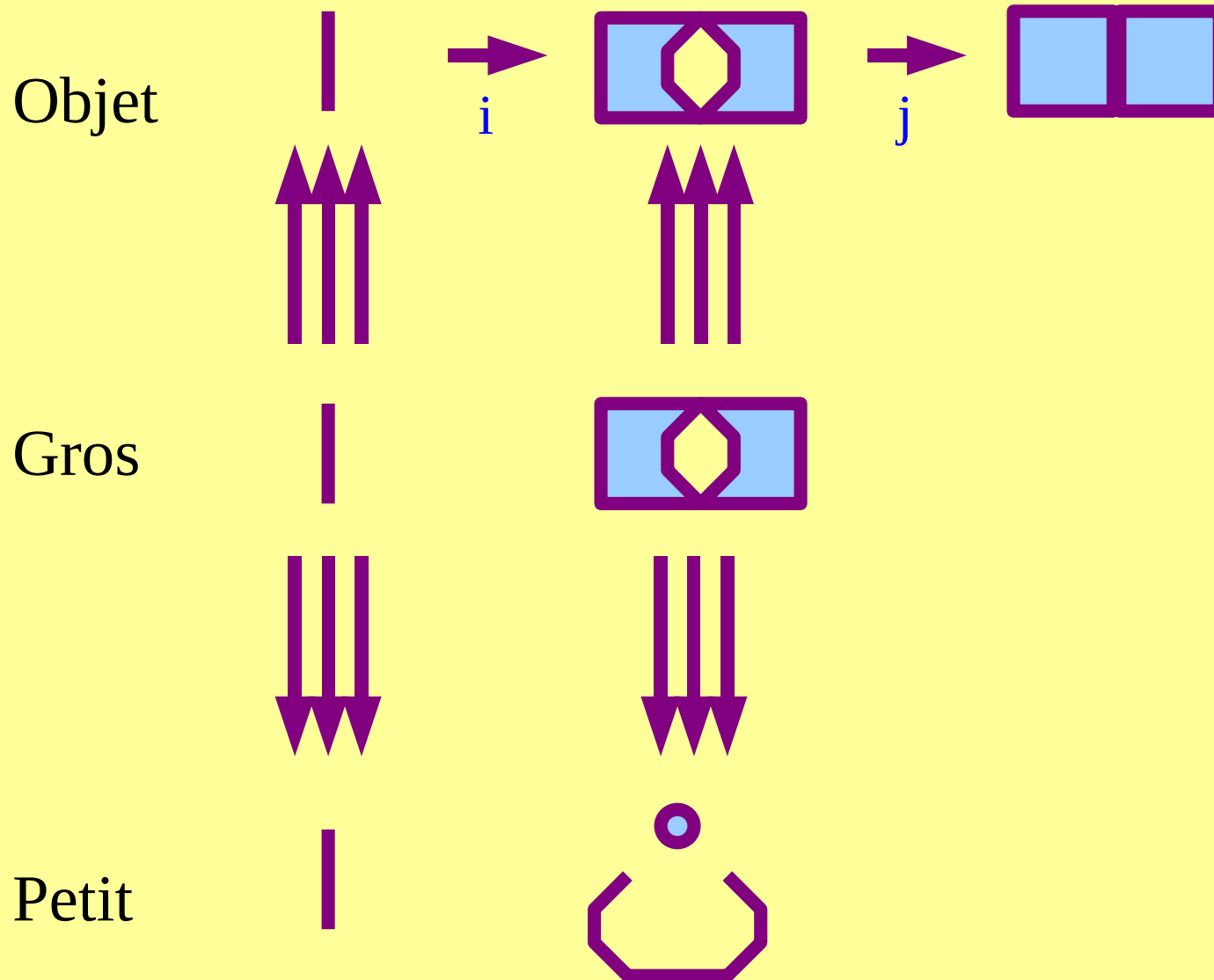
Exemple (identification)



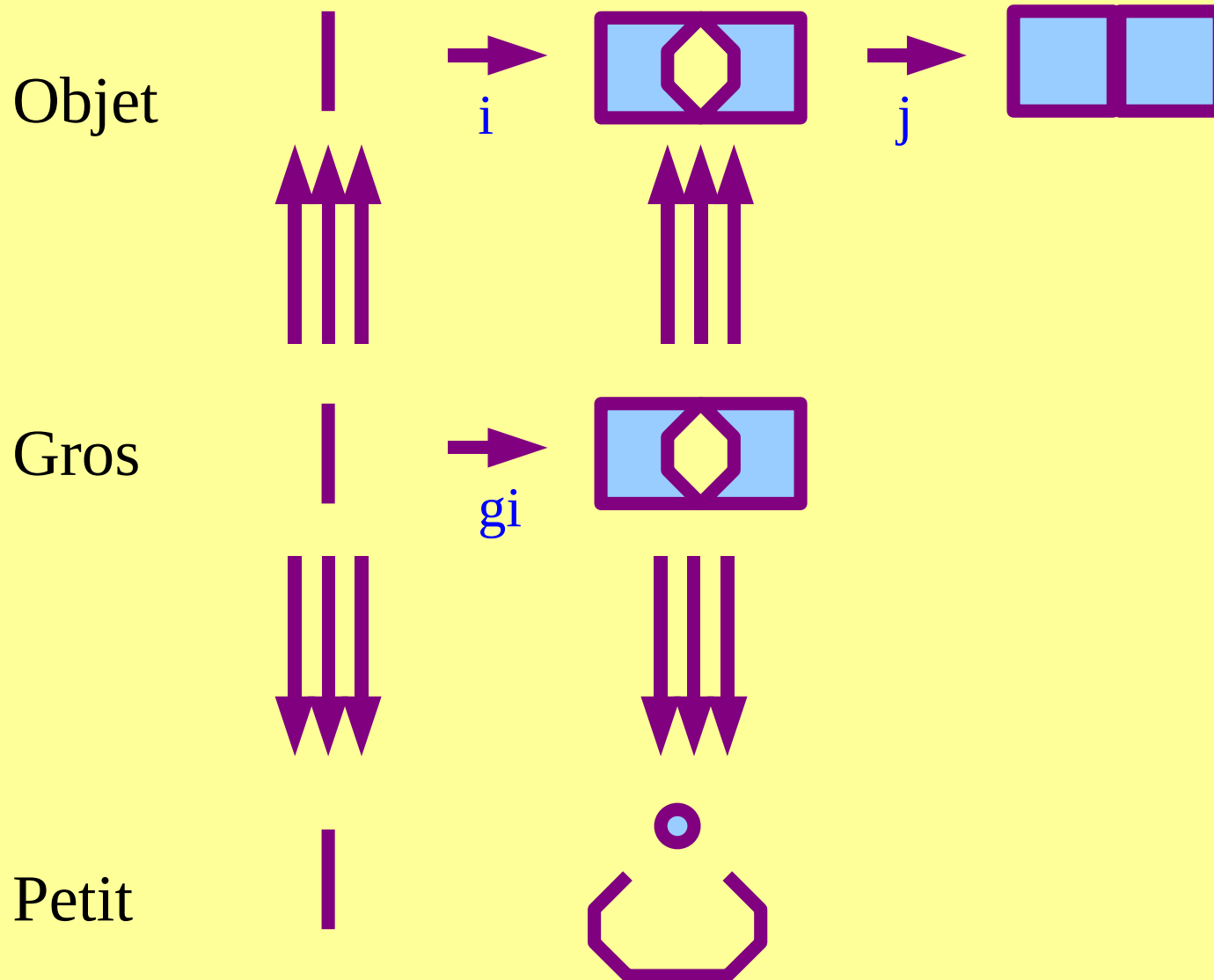
Exemple (identification)



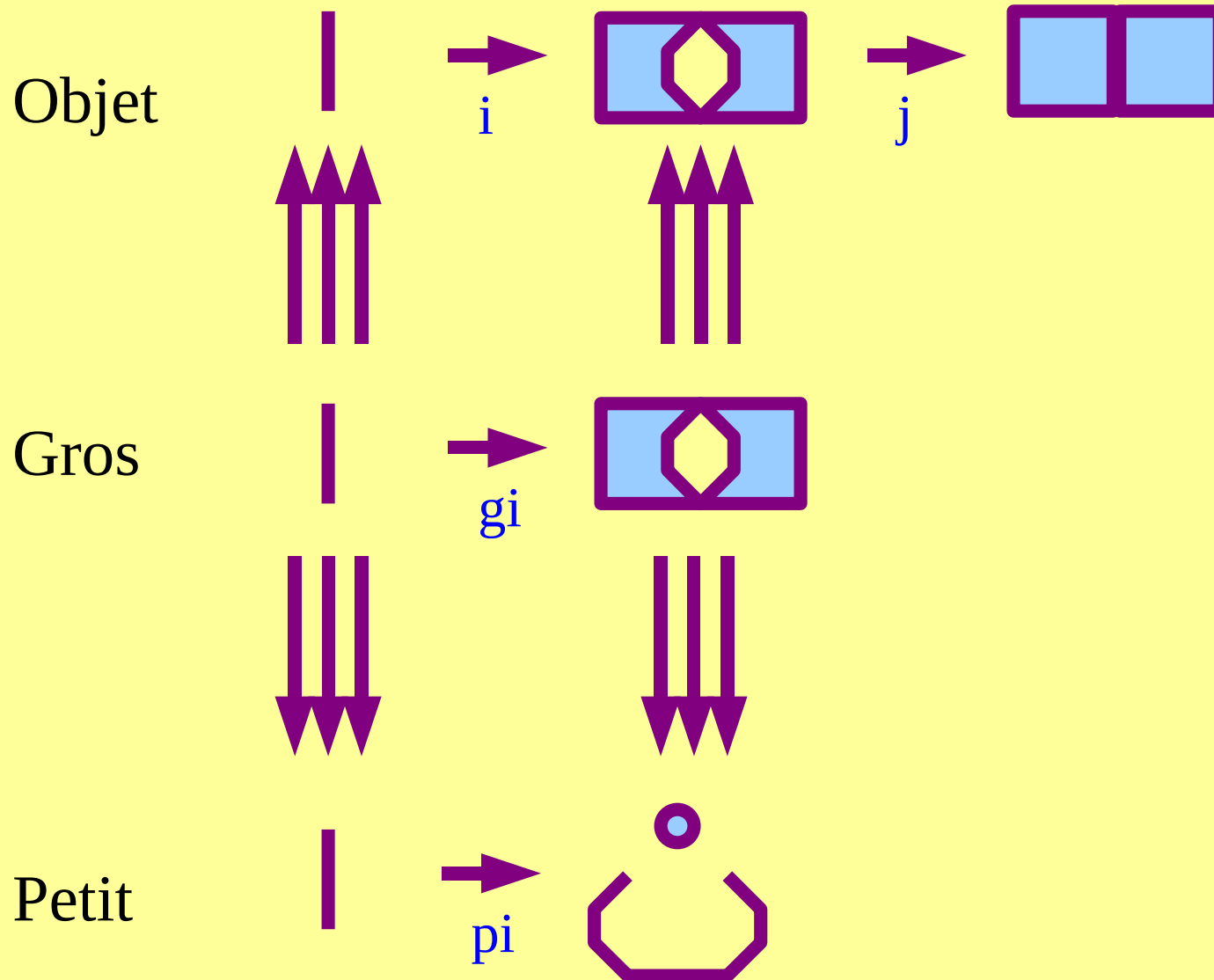
Exemple (identification)



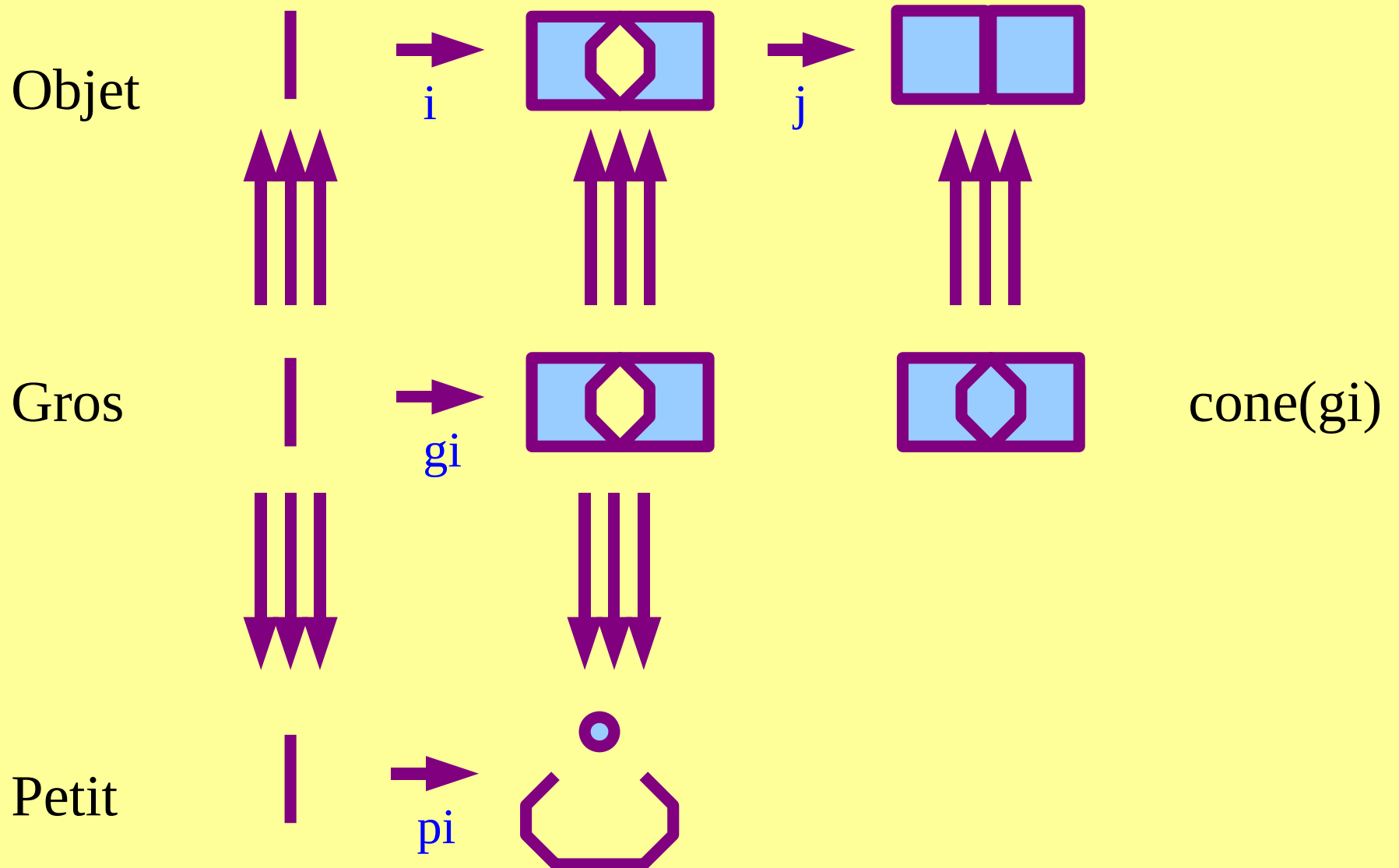
Exemple (identification)



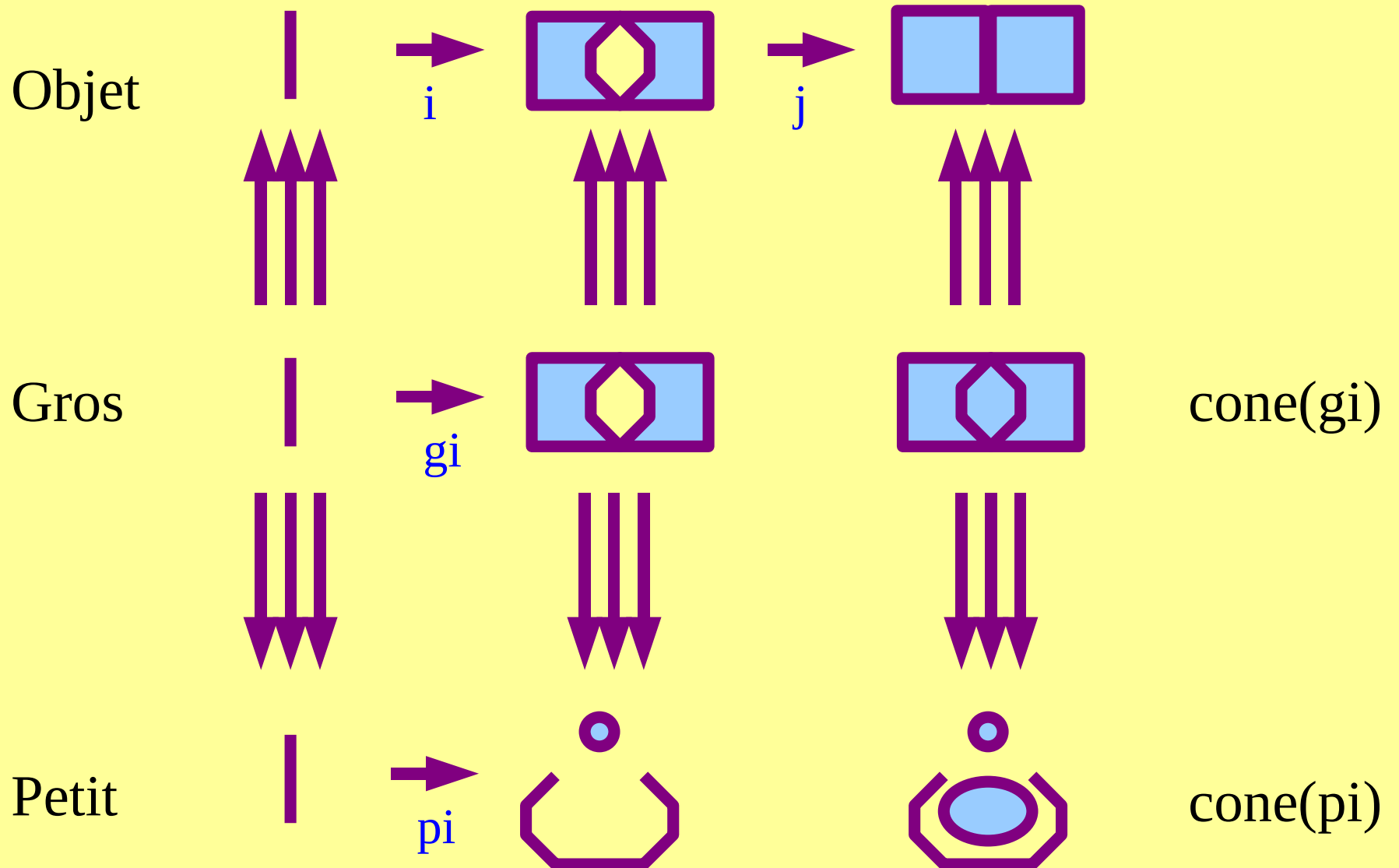
Exemple (identification)



Exemple (identification)



Exemple (identification)



Problèmes en cours

Gros objet :

indispensable pour calculer lors de l'opération suivante

Problèmes en cours

Gros objet :

indispensable pour calculer lors de l'opération suivante
contient

TOUS les éléments de l'objet en cours de construction
+ TOUS les actes constructifs

Problèmes en cours

Gros objet :

indispensable pour calculer lors de l'opération suivante
contient

TOUS les éléments de l'objet en cours de construction
+ TOUS les actes constructifs
=> problème de complexité

Problèmes en cours

Gros objet :

indispensable pour calculer lors de l'opération suivante
contient

TOUS les éléments de l'objet en cours de construction
+ TOUS les actes constructifs
=> problème de complexité

=> optimisation

Problèmes en cours

Gros objet :

indispensable pour calculer lors de l'opération suivante
contient

TOUS les éléments de l'objet en cours de construction
+ TOUS les actes constructifs
=> problème de complexité

=> optimisation
générale

Problèmes en cours

Gros objet :

indispensable pour calculer lors de l'opération suivante
contient

TOUS les éléments de l'objet en cours de construction
+ TOUS les actes constructifs
=> problème de complexité

=> optimisation

générale

pour les objets cellulaires (cartes et dérivées)

Problèmes en cours

Gros objet :

indispensable pour calculer lors de l'opération suivante
contient

TOUS les éléments de l'objet en cours de construction
+ TOUS les actes constructifs
=> problème de complexité

=> optimisation

générale

pour les objets cellulaires (cartes et dérivées)

Etude d'autres opérations (contraction, etc)

Apport de l'approche formelle

Constructions complexes

Apport de l'approche formelle

Constructions complexes

=> dans un premier temps, preuve de correction

Apport de l'approche formelle

Constructions complexes

=> dans un premier temps, preuve de correction

=> dans un second temps,
 élaboration du programme de calcul

Apport de l'approche formelle

Constructions complexes

=> dans un premier temps, preuve de correction

=> dans un second temps,
 élaboration du programme de calcul
 + étude de l'optimisation