Formalisation de l'algèbre de Grassman en Coq

Sylvain Charneau   Laurent Fuchs   Laurent Théry

Introduction

Le formalisme de l'algèbre de Grassmann

- Langage pour représenter et manipuler des sous-espaces (vectoriels)
- Sans faire référence à un système de coordonnées
- Généralisation des vecteurs ; notion de multi-vecteurs
- Exprimer la dépendance linéaire des vecteurs ($a \wedge b = 0$)

Ingrédients

- Corps K
- Espace vectoriel E
- Produit extérieur $\wedge$

Corps

```
Structure Field := {
      K:> Set;
      0:  K;
      1:  K;
     ?=:  K → K → bool;
      -:  K → K;
      +:  K → K → K;
      *:  K → K → K;
   _⁻¹:  K → K
passoc:  forall x y z, (x + y) + z = x + (y + z);
          ...
}
```

Espace Vectoriel

```
Structure VectorSpace := {
      V:> Set;
      K: Field;
      0:  V;
    ??=:  V → V → bool;
     ++:  V → V → V;
     .*:  K → V → V;
          ...
sdistr:  forall k x y,
  k .* (x ++ y) = (k .* x) ++ (k .* y);
          ...
}
```

Espace Vectoriel K^n

$\texttt{Function}\ K^n\ \texttt{:=}$

$\quad\texttt{match}\ n\ \texttt{with 0} \Rightarrow K\ \texttt{|}\ \texttt{S}\ n_1 \Rightarrow K \times K^{n_1}\ \texttt{end.}$

$$K^2 \approx K^{S(S\,0)} \approx K \times K^1 \approx K \times (K \times K) \approx K \times K \times K$$

$\texttt{Function}\ x\ \texttt{++}\ y\ \texttt{:}\ K^n\ \texttt{:=}$

$\quad\texttt{match}\ n\ \texttt{with}$

$\qquad\quad \texttt{0} \Rightarrow x\ \texttt{+}\ y$

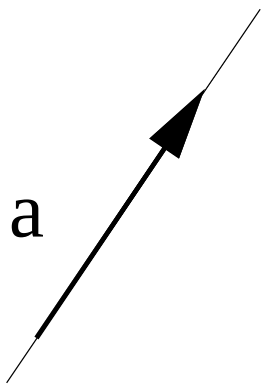
$\quad\texttt{|}\ \texttt{S}\ n_1 \Rightarrow \texttt{let (}k_x\texttt{,}\ x_1\texttt{) :=}\ x\ \texttt{in}$

$\qquad\qquad\qquad \texttt{let (}k_y\texttt{,}\ y_1\texttt{) :=}\ y\ \texttt{in (}k_x\ \texttt{+}\ k_y\texttt{,}\ x_1\ \texttt{++}\ y_1\texttt{)}$

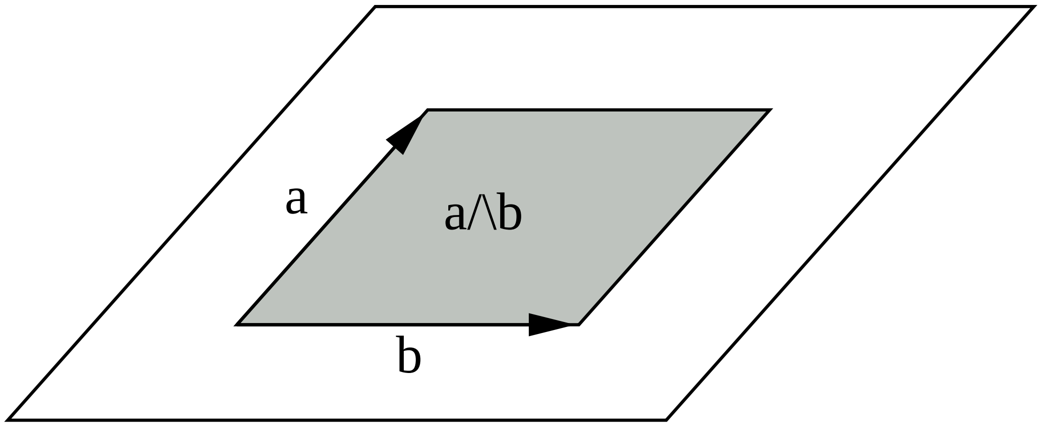
$\quad\texttt{end.}$

Algèbre de Grassmann

Vecteur



Bivecteur



Base de $\mathcal{G}_2$: $(1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$

Algèbre de Grassmann $\mathtt{G}^n$

```
Function G^n :=
  match n with 0 ⇒ K | S n1 ⇒ G^n1 × G^n1 end.
```

$$\mathtt{G}^2 \approx \mathtt{G}^1 \times \mathtt{G}^1 \approx ((K \times K) \times (K \times K)) \approx K \times K \times K \times K$$

```
Function x ++ y :  G^n :=
  match n with
       0  ⇒ x + y
  | S n1  ⇒ let (x1, x2) := x in
            let (y1, y2) := y in (x1 ++ y1, x2 ++ y2)
  end.
```

Produit exterieur

$$a \wedge b \rightsquigarrow \quad a \texttt{ ** } b$$

Propriétés:

$a \texttt{ ** } a \texttt{ = 0}$

$\texttt{e}_i \texttt{ ** } \texttt{e}_j \texttt{ = (-1) .* (}\texttt{e}_j \texttt{ ** } \texttt{e}_i\texttt{)}$

$a\texttt{:} \quad \texttt{G}^{n+1} \approx \texttt{(}a_1\texttt{,}a_2\texttt{)} = \texttt{e}_{n+1} \texttt{ ** } \overline{a_1} \texttt{ ++ } \overline{a_2}$

$\texttt{(e}_n \texttt{ ** } \overline{x_1} \texttt{ ++ } \overline{x_2}\texttt{)} \texttt{ ** } \texttt{(e}_n \texttt{ ** } \overline{y_1} \texttt{ ++ } \overline{y_2}\texttt{)} =$

$\texttt{(e}_n \texttt{ ** } \overline{x_1} \texttt{ ** } \overline{y_2} \texttt{ ++ } \overline{x_2} \texttt{ ** } \texttt{e}_n \texttt{ ** } \overline{y_1} \texttt{) ++ } \overline{x_2} \texttt{ ** } \overline{y_2} =$

$\texttt{e}_n \texttt{ ** } \overline{x_1 \texttt{ ** } y_2 \texttt{ ++ } x_2^{\perp} \texttt{ ** } y_1} \texttt{ ++ } \overline{x_2 \texttt{ ** } y_2}$

Produit exterieur

```
Function x^b : G^n :=
  match n with
      0  ⇒ if b then -x else x
  | S n1 ⇒ let (x1, x2) := x in (x1^¬b, x2^b)
  end.

Function x ** y :  G^n :=
  match n with
      0  ⇒ x + y
  | S n1 ⇒ let (x1, x2) := x in
           let (y1, y2) := y in
           (x1 ** y2 ++ x2^⊥ ** y1, x2 ** y2)
  end.
```

État courant

GForge galapagos: `dev/trunk/GeometricAlgebra`

Infrastructure: Corps, Espace Vectoriel, K^n

Algèbre de Grassman: définitions + propriétés de base

Sous-espace vectoriel: x `**` M `= 0`

Élément homogène: définition + propriétés élémentaires

Contraction: définition + propriétés élémentaires